خواص جبری اعداد حقیقی

دستگاه اعداد حقیقی مجموعه‌ای از اشیاء است که اعداد حقیقی نامیده می‌شوند و با $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود به طوری که دو عمل $+$ و $\cdot$ نیز با یک ترتیب که با $<$ نشان می‌دهند و دو عضو مشخص (دوتایی) صفر و همانی با 0 و 1 نشان می‌دهند که در اصول موضوعه ذیل صدق کند گفته می‌شود.

اصول جبری: برای هر $a,b,c\in\mathbb{R}$

A1: $a+b=b+a$

A2: $(a+b)+c=a+(b+c)$

A3: $a+0=0+a=a$

A4: $a+(-a)=(-a)+a=0$.

اصول ضربی

A5: $a\cdot b=b\cdot a$

A6: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

A7: $a\cdot 1=1\cdot a=a$

A8. $\forall a\in\mathbb{R};\ a\neq 0,\ \exists a^{-1}\in\mathbb{R};\ a^{-1}a=1=aa^{-1}$.

خاصیت توزیع‌پذیری

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

تمرین ۱: اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $0\neq c$ آنگاه از $ac=bc$ تساوی $a=b$ نتیجه می‌گردد.

تمرین ۲.

i) $a\cdot 0=0$ ii) $-(-a)=a$ iii) $(c^{-1})^{-1}=c$

iv) $(-1)a=-a$ v) $a(-b)=(-a)b=-ab$ vi) $(-a)+(-b)=-(a+b)$

vii) $(-a)(-b)=ab$ viii) $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$

مجموعه‌های مهم از اعداد حقیقی:

با داشتن 1 می‌توان $2:=1+1$ و $3:=2+1$ و ... و $n+1=n+1$ و ... را ساخت و مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

نیز

$$\mathbb{Z} := \{ m \mid -m \in \mathbb{N} \text{ یا } m = 0 \} ,$$

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} , n \neq 0 \}$$

، عدد حقیقی که گویا نباشد را اصم نامیم.

اصول ترتیب: یک زیرمجموعه P از $\mathbb{R}$ وجود دارد که مجموعه اعداد مثبت نامیده می‌شود به طوری که

~~A10~~: $A10: \ \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \in P \ \underline{\vee} \ -a \in P \ \underline{\vee} \ a = 0$

$A11, \quad a, b \in P \Rightarrow a+b \in P \ , \ ab \in P .$

در این صورت a را منفی نامند هرگاه $-a$ مثبت باشد.

$a \leq b \equiv b-a \in P$ یا $a = b$

$a < b \equiv b-a \in P$

تمرین: اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ آنگاه

یک) $a<b, \ b<c \Rightarrow a<c$

دو) $a<b \ \underline{\vee} \ b<a \ \underline{\vee} \ a=b$

سه) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

چهار) $a<b, \ 0<c \Rightarrow ac<bc$

پنج) $a<b, \ c<0 \Rightarrow ac>bc$

شش) $0<1, \quad -1<0$

هفت) $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$

هشت) $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

قدر مطلق:

قدر مطلق یک عدد حقیقی a چنین تعریف می‌شود

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

تمرین:

یک) $|ab| = |a||b|$

دو) $|a+b| \leq |a|+|b|$

سه) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

بر اساس تعریف ترتیب بازه‌ها قابل تعریف می‌شوند

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

$(a,b) = \quad \text{———} \quad < \quad <$

$[a,+\infty) = \{x \text{ — } a \le x\}$

میدان‌های مرتب:

هر مجموعه S به همراه دو عمل $+$ و $\cdot$ و زیرمجموعه P که در اصول A1 تا A11 صدق کند را یک میدان مرتب نامند.

مثال: $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ میدان‌های مرتب‌اند.

مثال: میدان اعداد حقیقی جبری که در واقع عددی را جبری نامند هرگاه جواب یک چندجمله‌ای به فرم $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ باشد که در آن ضرایب گویا باشند.

اصل ~~تمامیت~~ کمال

اصل کمال دد کنید:

A12:

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی است با خواص ذیل

i) $a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$

ii) $\mathbb{R} = A \cup B$

آنگاه عدد حقیقی منحصر بفرد c وجود دارد به طوری که

a) $a < c \Rightarrow a \in A$

b) $c < b \Rightarrow b \in B$.

به زوج $\{A, B\}$ یک برش دد کنید گویند.

تذکر: اصل مشابه برای $\mathbb{Q}$ نیست چرا که $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$

حال اگر c موجود بود پس $c^2 \ge 2$ و $c^2 \le 2$ و بنابراین $c^2 = 2$ که نادرست است.

قضیه: عدد حقیقی c وجود دارد به طوری که $c^2=2$

اثبات: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2<2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\geq 2\}$ در این صورت

$\{A,B\}$ یک برش دوگینه است پس عضو منحصر به فرد c وجود دارد که

$$x<c \Rightarrow x^2<2 \qquad (1)$$
$$x>c \Rightarrow x^2\geq 2$$

اما $c-\epsilon$ مانند x است در قسمت اول

$$\Rightarrow (c-\epsilon)^2<2$$
$$(c+\epsilon)^2\geq 2$$

حال به خلف: اگر $c^2\neq 2$ پس مثلاً $c^2>2 \Rightarrow (c-\epsilon)^2>2$ ✗

$c^2\leq 2$ $\quad (c+x)^2\leq 2$

کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین

خواهد گفت شد.

$c-\epsilon\in B$

(1) $c\in B \Rightarrow$ ~~$c<c-\epsilon$~~ ✗ $\quad (1)\Rightarrow \begin{cases} x<c \Rightarrow x\in A \\ x>c \Rightarrow x\in B \end{cases}$

توجه $c\in B$

$c^2>2 \Rightarrow (c-\epsilon)^2>2 \Rightarrow c-\epsilon\in B$ ✗

(1) $c-\epsilon<c \Rightarrow c-\epsilon\in A$

حالت بعد مشابه

خاصیت ~~[illegible]~~ ارشمیدس

مثال: $\mathbb{N}$ از بالا کراندار نیست

خلف: اگر باشد پس کوچکترین کران بالا دارد

$$n\leq b$$
$$\Rightarrow n+1\leq b$$
$$n\leq b-1$$

✗

فرع: اگر $\epsilon>0$ آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد که $0<\frac{1}{n}<\epsilon$.

اثبات: اگر نه

$$\forall n: \quad \frac{1}{n}\geq\epsilon$$
$$\Rightarrow n\leq\frac{1}{\epsilon}$$

✗

مثال: برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ که $x<y$ عدد r وجود دارد که
$x<r<y$

حل: حالت $1<y-x$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$S:=\{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\mid j\le x\}\ ,\quad \sup S:=l$$

در این صورت $k:=l+1<y$ پس $x<k<y$. بحث حالت دیگر بعنوان تمرین

روش دوم: $0<y-x$ بنابر اصل کمال عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{1}{m}<y-x$.

از طرفی عدد طبیعی k وجود دارد که $\frac{k}{m}>x$ (در غیر اینصورت مجموعه اعداد طبیعی از بالا کراندار می‌شود)

فرض کنید n کوچکترین بجای k باشد. بنابراین

$$x<\frac{n}{m}\ ,\quad \frac{n-1}{m}\le x$$

از طرفی $\frac{n}{m}<y$. در این صورت $x<\frac{n}{m}<y$.

مثال: به ازای هر عدد حقیقی مثبت a، هر عدد طبیعی n عدد یکتای مثبت b هست که $b^n=a$.

حل: اگر $0<b_1<b_2$ پس $0<b_1^n<b_2^n$ بنابراین b در صورت وجود یکتاست، برای وجود:

$$B:=\{x>0\mid x^n<a\}$$

$$x_0:=\frac{a}{1+a}\Rightarrow 0<x_0<1\Rightarrow x_0^n<x_0<a\Rightarrow B\neq\phi$$

اگر $1+a<x\Rightarrow a^n<(1+a)^n<x^n\Rightarrow x\notin B$ $\Rightarrow$ B از بالا به $1+a$ کراندار $\Rightarrow$ $\sup B:=b$ وجود دارد

$b^n=a$ ✓

$b^n>a\Rightarrow h:=\min\{1,\frac{a-b^n}{n(b+1)^{n-1}}\}\Rightarrow (b+h)^n-b^n\le hn(b+h)^{n-1}\le hn(b+1)^{n-1}<a-b^n$

$\Rightarrow b+h\in B$ ✗

$b^n<a$ $\quad k:=\frac{b^n-a}{nb^{n-1}}\Rightarrow b^n-(b-k)^n=k(b^{n-1}+\dots+(b-k)^{n-1})$

$\le knb^{n-1}=b^n-a\Rightarrow (b-k)^n>a$

$b-k$ کران بالا B ✗

تمرین:

۱. اگر $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ آنگاه $\sup(-A) = -\inf A$

۲. اگر $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ آنگاه $\sup A \leq \sup B$ و $\inf B \leq \inf A$

۳. اگر X و Y دو مجموعه و تابع $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ دارای حدود کرانه‌دار باشد قرار دهید

$$f_1(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y) \quad , \quad f_2(y) = \sup_{x \in X} f(x,y)$$

آنگاه (یک)

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x,y) = \sup_{x \in X} f_1(x) = \sup_{y \in Y} f_2(y)$$

(دو)

$$\sup_y \inf_x f(x,y) \leq \inf_x \sup_y f(x,y)$$

۴. اگر $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}$ آنگاه

(یک)

$$\sup(a+A) = a + \sup A$$
$$\inf(a+A) = a + \inf A$$

۵. برای دو تابع $f, g: X \to \mathbb{R}$

(یک)

$$\inf f + \inf g \leq \inf f+g$$
$$\sup f + \sup g \geq \sup f+g$$

دنباله‌ها:

مجموعه‌ای که متناهی است هرگاه تهی و یا معادل (یعنی در تناظر یک به یک) با قطعه‌ای از اعداد طبیعی چون $\{1,\dots,n\}$ باشد که $n \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم $A \simeq \{1,\dots,n\}$ (اگر تهی باشد $A \simeq \phi$).

مثال: ۱- اعداد طبیعی زوج $E \simeq \mathbb{N}$ زیرا

$$E \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \longmapsto \frac{x}{2}$$

تناظر است

۲- $\mathbb{R} \simeq (a,b)$ زیرا

$$(a,b) \longrightarrow (0,1), \quad x \longmapsto \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow (a,b) \sim (0,1)$$

$$(0,1) \longrightarrow (0,\infty), \quad x \longmapsto \frac{x}{1-x} \Rightarrow (0,1) \sim (0,\infty)$$

$$(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x} - x \Rightarrow (0,\infty) \simeq \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \simeq (a,b).$$

مجموعه‌ای که متناهی و یا معادل با $\mathbb{N}$ باشد را شمارش‌پذیر نامیم و در غیر این صورت ناشمارا.

اگر $A \simeq \mathbb{N}$ آن را شمارای نامتناهی نامیم.

مثال: $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است

زیرا کافیست تناظر را بدین شکل بنویسیم

۰	۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	...
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

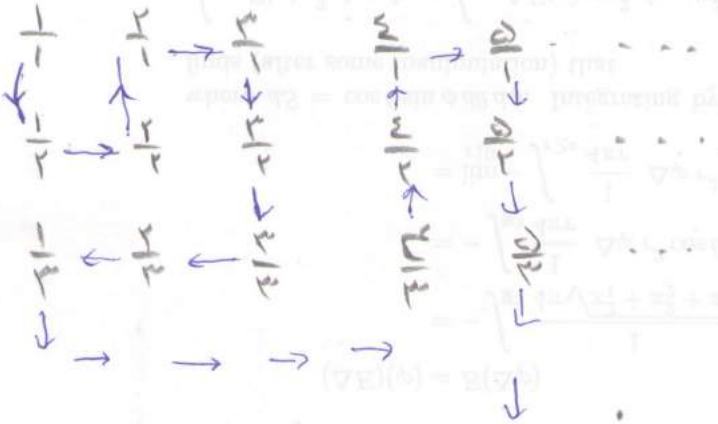
تمرین: هر زیرمجموعه از یک مجموعه شمارش‌پذیر خود شمارش‌پذیر است.

تمرین: اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارش‌پذیر مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

مثال. $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است.

کافیست $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{Q}^-$ شمارا پذیر باشند در این صورت چون $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^-$ شمارای نامتناهی خواهد شد.

و کافیست $\mathbb{Q}^+$ چنین باشد. برای بررسی آن



دنباله مورد نظر است

مثال: $\mathbb{R}$ شمارا نیست. (بنابراین فواصل چون (a,b))

کافیست (و) برای شمارا خلف: اگر شمارا باشد چون نامتناهی است پس شمارای نامتناهی می‌شود هر یک دنباله از نقاط متمایز.

$b_1 = 0/a_{11}a_{12}\cdots$

$b_2 = 0/a_{21}a_{22}\cdots$

حال عدد $c = 0/c_1c_2c_3\cdots$ را در نظر بگیرید

که $c_1 \neq a_{11}$

$c_2 \neq a_{22}$

در این صورت $c \in (0,1)$ ولی متمایز از اعضای $(b_n)_n$.

فضای متریک و خواص آن

تعریف: فرض کنید $\phi \neq X$ در این صورت تابع $d: X\times X \to \mathbb{R}_+$ را یک متر روی X نامند هرگاه

i) $d(x,y)=0 \iff x=y$

ii) $d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y\in X$

iii) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in X$.

مثال:

$$d(f,g)=\int_0^1 |(f-g)(x)|\,dx$$

همه خواص بجز خاصیت (i) را دارا است و اگر f و g حداکثر در تعداد شمارایی نقطه متفاوت باشند

$d(f,g)=0 \not\Rightarrow f=g$ که به آن شبه متریک گویند

مثال از متر

1) $d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

2) $d(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$

3) $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ متریک گسسته برای $\phi\neq X$

4) اگر d یک متر روی X باشد آنگاه

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

نیز یک متر است

تمرین: نامساوی مثلثی را از صورت درس $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ نتیجه بگیرید

تعریف: دو متر d_1 و d_2 را روی X معادل نامند هرگاه

$$\exists c_1, c_2 > 0 \; ; \quad c_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le c_2 d_1(x,y)$$

$$\forall x, y \in X .$$

مثال: در $\mathbb{R}^2$:

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \operatorname{Max}\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

و $$d_2(\;,\;) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

معادلند. در واقع

$$d_1 \le d_2 \le \sqrt{2}\, d_1$$

تعریف: در (X,d) گوی‌ها به این شرح تعریف می‌گردند

- گوی باز به مرکز x_0 و شعاع δ :

$$B_\delta(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < \delta\}$$

- گوی بسته " "

$$B_\delta[x_0] = \{x \in X \mid d(x,x_0) \le \delta\}$$

مثال: در فضای گسسته (یعنی X به همراه متریک گسسته) اگر $\delta < 1$

$$B_\delta(x_0) = \{x_0\}$$

پس تک نقطه‌ای‌ها (تک عضوی‌ها) باز و در نتیجه هر زیرمجموعه X باز است

و بنابراین هر زیرمجموعه از X بسته است.

تعریف: $A \subseteq (X,d)$ باز است هرگاه

$$\forall x_0 \in A, \; \exists \delta > 0 \; ; \quad B_\delta(x_0) \subseteq A$$

که در این صورت به چنین نقاطی از A نقاط درونی گفته می‌شود.

تمرین: ۱) هر گوی در یک فضای متریک باز است.

۲) ϕ و X در X باز می‌باشند

۳) اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، مجموعه باز است

۴) اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه باز می‌باشد.

تمرین: اشتراک دلخواه از مجموعه‌های باز لزوماً باز نیست. مثلاً $G_n=(2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})$ آنگاه $\bigcap G_n=\{2\}$ که باز نیست.

تعریف: دنباله (x_n) در (X,d) ۱) همگرا نامیده می‌شود هرگاه

$$d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

یعنی

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N>0;\ \forall n\geq N\Rightarrow d(x_n,x)<\epsilon$$

۲) کشی نامیده می‌شود هرگاه

$$d(x_n,x_m)\xrightarrow[n,m\to+\infty]{}0$$

یعنی

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N>0;\ \forall n,m\geq N\Rightarrow d(x_n,x_m)<\epsilon$$

۳) $A\subseteq X$ کراندار نامیده می‌شود هرگاه در یک گوی قرار گیرد یعنی

$$\exists x_0\in X,\ \exists\delta>0;\ A\subseteq B_\delta(x_0)$$

۴) منظور از یک زیردنباله از (x_n) یعنی $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ که در آن (n_k) دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی است.

مانند

$x_2,x_4,x_6,\dots$

قضیه: در (X,d) اگر (x_n) دنباله‌ای باشد

۱) (x_n) همگرا است اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ای به x همگرا باشد

۲) اگر $(x_n)_n$ همگرا باشد آنگاه (x_n) دنباله‌ای کوشی است

۳) هر دنباله همگرا دنباله‌ای کراندار است.

۴) اگر d متریک گسسته باشد

$$x_n \to x \iff x_n = x \quad (\exists N>0 ;\ \forall n \geq N)$$

۵) اگر $A \subseteq X$ تحت متر d_1 باز باشد و d_1 با d_2 معادل باشد در این صورت تحت متر d_2 نیز باز است. همچنین همگرایی تحت دو نرم دیگری را نتیجه می‌دهد. هر یک از

تعریف: $A \subseteq X$ را بسته نامند هرگاه A^c باز باشد

مثال ۱: $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ بسته است

مثال ۲: $B_\rho[x_0]$ در (X,d) همواره بسته است.

علت: کافیست نشان دهیم $B_\rho^c[x_0]$ باز است

اگر $x_1 \in B_\rho^c[x_0] \Rightarrow d(x_1,x_0) > \rho$

با انتخاب $\delta < d(x_1,x_0) - \rho$ مشاهده می‌کنیم

$B_\delta(x_1) \subseteq B_\rho^c[x_0]$

که نشان می‌دهد x_1 درونی و در نتیجه $B_\rho^c[x_0]$ باز خواهد بود.

$$\forall w \in B_\delta(x_1) \Rightarrow d(w,x_0) \geq -d(w,x_1) + d(x_1,x_0)$$
$$> -\delta + d(x_1,x_0) < d$$
$$> \rho - d(x_1,x_0) + d(x_1,x_0) = \rho.$$

مثال

۱. $a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه $a_n \to 0$

اصل ارشمیدسی

$\forall \epsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N} ; \frac{1}{N} < \epsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

۲. $a_n = 2 + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ آنگاه $a_n \to 2$

$|a_n - 2| = \frac{1}{n} |\sin \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow a_n \to 2$

۳. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ آنگاه $\lim a_n = 0$

$|a_n - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\xrightarrow{\text{ارشمیدسی}} \exists N , \frac{1}{N} < 4\epsilon^2 \xrightarrow[\forall n \geq N]{} \frac{1}{n} \leq 4\epsilon^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\epsilon \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \epsilon$

$\Rightarrow |a_n| \leq \epsilon$.

قضیه: ۱. اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ در $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) آنگاه

$a_n \pm b_n \to a \pm b$

$\div$ $\div$

در حالت $\mathbb{R}$ و اگر $0 \neq b$

۲. حد در صورت وجود منحصر بفرد است

اثبات: (۱): $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

که قسمت اول نتیجه می‌دهد.

قسمت دوم از اینکه ~~...~~ تمرین زیر نتیجه می‌شود.

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$

$\leq |a_n| + |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|$

$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} |a_n b - a b_n| \leq \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot (|a_n - a||b| + |a||b_n - a|)$

(۲) تمرین.

تمرین: اگر $c_n \to 0$ و (d_n) دنباله‌ای کراندار باشد آنگاه $d_n c_n \to 0$.

قضیه (اصل تله موشی): اگر $c_n \le a_n \le b_n$ و

$$b_n , c_n \to L \Rightarrow a_n \to L$$

اثبات:

$$0 \le a_n - c_n \le b_n - c_n = b_n - L + L - c_n$$

$$\underset{n \ge N \text{ اگر}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 \leftarrow a_n - c_n = a_n - L + \underbrace{L - c_n}_{\downarrow\, 0} \Rightarrow a_n \to L$$

مثال: ۱.

$$p > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

۲.

$$p > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

۳.

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

۴.

$$a, p > 0 \Rightarrow \frac{n^a}{(1+p)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

۵.

$$a \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \text{و} \\ n^a x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

حل:

(۱):

$$\xrightarrow[\exists N > 0]{\text{ارشمیدس}} \frac{1}{N} < \epsilon^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[\forall n \ge N]{} \frac{1}{n} < \epsilon^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{1}{n^p} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^p} \to 0 .$$

(۲):

$$\text{KP} \nearrow x_n := \sqrt[n]{p} - 1 \Rightarrow x_n + 1 = \sqrt[n]{p} \Rightarrow p = (1+x_n)^n \ge 1 + n x_n$$

$$\Rightarrow 0 \le x_n \le \frac{p-1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow x_n \to 0$$

$p = 1$ بدیهی

$$p < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{قبل}]{\text{با قرحالت}} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \to 1 \quad ✓$$

(۳)

$$0 \le x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1+x_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow 0 \le x_n^2 \le \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow x_n \to 0$$

(۴): $(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} > \frac{n^k}{2^k}\frac{p^k}{k!}$

$$0 < \frac{n^a}{(1+p)^n} < \frac{n^a}{\frac{n^k}{2^k}\frac{p^k}{k!}} = \frac{2^k k!}{p^k} \cdot n^{a-k} \longrightarrow 0$$

چون $a-k<0$

(۵): در (۴) اگر $|x| = \frac{1}{1+p}$ بگیریم

$$n^a |x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

و اگر $a=0$ که $|x|^n \to 0$ نتیجه می‌شود.

دنباله‌های یکنوا

(a_n) را صعودی نامیم هرگاه

$$a_n \le a_{n+1}$$

نزولی

$$a_n \ge a_{n+1}$$

در صورتیکه $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله از (a_n) نامند.

گزاره: اگر $a_n \to a$ در این صورت

(۱) (a_n) کراندار

(۲) $a_{n_k} \to a$

(۳) $(a_n)_n$ کوشی است یعنی

$$\forall \epsilon>0, \exists n,m \ge N; \ |a_n - a_m| < \epsilon$$

یعنی

$$a_n - a_m \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

اثبات: (۱)

$$\epsilon = 1, \ \exists N>0; \ \forall n \ge N \quad \underbrace{|a_n - a|}_{|a_n|-|a|} < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| < 1 + |a| \quad n \ge N$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1+|a|\}$$

(۳)

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$

$$\underset{n,m \geq N}{=} |a_n - a| + |a_m - a| < 2\epsilon .$$

(۴)

$$|a_{n_k} - a| \overset{k \geq k_0 ,\ n_k \geq N}{=} |a_{n_k} - \leq \epsilon .$$

گزاره: اگر $(a_n)_n$ یکنوا باشد حد دارد (ممکن است مقدار حد بی‌نهایت شود)

اثبات: مثلاً صعودی است.

(a_n) از بالا بی‌کران $\Rightarrow \exists n_k \quad a_{n_k} \to +\infty \overset{k \geq k_0}{\underset{\forall M > 0}{\Longrightarrow}} M < a_{n_k} \leq a_m \Rightarrow a_m \to +\infty \quad \forall m \geq n_{k_0}$

$(a_n)_n$ از بالا کراندار $\quad a = \underset{n \text{ عدد}}{\sup} a_n \Rightarrow \epsilon > 0$

$$a - \epsilon \underset{\exists N}{<} a_N \leq a_n \underset{\forall n \geq N}{<} a + \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n \to a ,$$

مشابه بحث اگر دنباله نزولی از پایین کراندار باشد به اینفیمم دنباله همگرا می‌شود.

مثال: اگر $x = b/c_1 c_2 c_3 \cdots$ عدد اعشاری مثبت باشد آنگاه

$x_n = b/c_1 \cdots c_n$ دنباله‌ای صعودی است و به x همگرا می‌شود.

مثال: $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار پس همگراست زیرا

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\geq \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n .$$

$$0 < a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ تا}} = 1$$

مثال: $a_n = \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times 2n}$ نزولی و از پایین کراندار است زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

و $0 < a_n$

تمرین:

۱. $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$ همگراست.

۲. اگر $a_n > 0$ و $a_n \to a$ آنگاه $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

۳. اگر $(a_n)_n$ از اعداد مثبت و $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ و آنگاه

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0 \\ l > 1 \Rightarrow \lim a_n = \infty \end{cases}$$

۳. $(\sin n)_n$ واگراست

۴. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ صعودی و از بالا کراندار و در نتیجه همگراست.

۵. اگر $(a_n)_n$ دنباله‌ای همگرا و یکنوا و کراندار باشد و $t_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$ آنگاه نیز یکنوا و کراندار است.

۶. اگر

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

آنگاه $(a_n)_n$ صعودی و از بالا کراندار است.

۷. اگر $0 < a_1 < 1$ و $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$ آنگاه دنباله نزولی و همگراست و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$$

۸. اگر $a_0 = 1$ و $a_n = \frac{3a_{n-1}+11}{9}$ آنگاه $a_n \to \frac{11}{6}$.

حد زیرینه و حد زبرینه

$\liminf$ $\limsup$

اگر $(a_n)_n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد قرار می‌دهیم

$$b_1 = \sup\{a_1, a_2, \dots\} \qquad c_1 = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$$

$$b_2 = \sup\{a_2, a_3, \dots\} \qquad c_2 = \inf\{a_2, a_3, \dots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \qquad c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

اگر $(b_n)_n$ دنباله‌ای نزولی و (c_n) دنباله‌ای صعودی است، قرار می‌دهیم

$$\limsup_n (a_n) = \inf_n b_n \quad , \quad \liminf a_n = \sup_n c_n$$

مثال:

(۱) $a_n = (-1)^n$

$$\limsup a_n = 1 \quad , \quad \liminf a_n = -1$$

(۲) $a_n = (-1)^n n$

$$\limsup a_n = +\infty \quad , \quad \liminf a_n = -\infty$$

از طرفی:

(۱) $$\limsup a_n = a \equiv \begin{cases} \forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0;\ \forall n \geq N \quad a_n < a + \epsilon \\ \text{و} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists N > 0;\ \forall n \geq N \quad a - \epsilon < a_n \end{cases}$$

(۲) ~~$\liminf a_n = a$~~

(۳) $$\lim a_n = a \equiv (\liminf a_n = \limsup a_n = a)$$

اثبات: (۳) از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود و (۱) و (۲) مشابه هم می‌باشند برای مثال (۱) را ثابت کنیم

$$\limsup a_n = a \equiv (\inf b_n = a) \Rightarrow \underset{\text{کران پایین } (b_n) \text{ نیست}}{a+\epsilon} \Rightarrow \exists N;\ b_N < a + \epsilon$$

$$\Rightarrow a_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N$$

به عکس

اگر $\exists N>0$; $a_n < a+\epsilon$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow$ پس $a+\epsilon$ کرانی بالا برای $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ می‌آورد

$\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$\Rightarrow b_n < a+\epsilon$

$\Rightarrow \limsup a_n < b_n < a+\epsilon$

$\Rightarrow$ دلخواه ϵ $\Rightarrow \boxed{\limsup a_n \leq a}$

از شرط دوم

$a-\epsilon < a_n$

$\Downarrow$ $n \geq N$

$a-\epsilon \leq b_n$ $n \geq N$

$\Downarrow$

$a-\epsilon \leq \limsup a_n$

$\Downarrow$

$\boxed{a \leq \limsup a_n} \rightarrow$ اثبات کامل

تمرین: برای دو دنباله $(a_n)_n$ و (b_n)

(۱) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

(۲) $\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n+b_n)$

(۳) $\limsup a_n + \limsup b_n \geq \limsup (a_n+b_n)$

مثال: اگر $a_n = n\sin^2(\frac{n\pi}{4})$

(۴) اگر A مجموعه حدود تمام زیردنباله‌های (a_n) باشد آنگاه

$\limsup a_n = \sup A$, $\liminf a_n = \inf A$

مثال: اگر $a_n = n\sin^2\frac{n\pi}{4}$

پس مجموعه A تنها شامل دو عضو است

$a_{4n+2} \rightarrow \infty \Rightarrow \infty \in A$

$\Rightarrow \limsup a_n = +\infty$

$a_{4n} \rightarrow 0 \Rightarrow \liminf a_n = 0$

در (X,d) اگر $A \subseteq X$

تعریف: $x_0 \in X$ را نقطه تجمع (حدی یا انباشتگی) برای A نامند هرگاه

$$\forall \epsilon > 0, \quad \left(B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\right) \cap A \neq \phi$$

و مجموعه نقاط تجمع A را با A' نشان میدهیم

تمرین: ۱) اگر x_0 نقطه تجمع A باشد آنگاه در هر همسایگی x_0 بی‌شمار از نقاط A دیده می‌شود.

۲) اگر $A \subseteq X$ متناهی باشد $A' = \phi$

۳) اگر $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; k = 0, \dots, 2^n - 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ مطلوبست A'

۴) ... $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \;\middle|\; m, n \geq 1 \right\}$ A'

۵) $x_0 \in A' \iff \left(\exists x_n \in A \text{ و } x_n \to x_0 \right)$ از نقاط متمایز

قضیه: برای $A \subseteq X$

A بسته $\iff A' \subseteq A$

قضیه (بولزانو - وایرشتراس)

هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار از $\mathbb{R}^n$ نقطه حدی دارد

اثبات: اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ کراندار و نامتناهی باشد

$\exists$ مجموعه $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$; $A \subseteq I$

اگر $\pi_i(A)$ مولفه i ام از عناصر A باشد لااقل یکی از آنها مثلاً $\pi_k(A)$ باید نامتناهی باشد اما چون کراندار است پس سوپریمم یا اینفیمم آن موجود است که نقطه‌ای حدی خواهد بود حال اگر آن را با a_k نشان دهیم

$$x = (x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

یک نقطه حدی برای A می‌شود که x_i ها نقطه دلخواهی از فواصل نظیرند.

تمرین: در $\mathbb{R}^n$ هر دنباله کراندار یک زیردنباله همگرا دارد.

(این دنباله یا متناهی است که یکی از اعضای آن نامتناهی بار تکراری است و کافیست آن را زیردنباله مورد نظر بگیریم و یا نامتناهی است که قضیه قبل نتیجه میدهد)

- اگر $A \subseteq X$ ، $x_0 \in X$ را نقطه مرزی نامند هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 ; \begin{cases} B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi \\ \text{و} \\ B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi \end{cases}$$

مجموعه چنین نقاطی را $bd(A)$ یا ∂A نشان میدهیم.

مثال: اگر $A = \mathbb{Q}$ آنگاه $bd(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

تعریف: اگر $A \subseteq X$ ، قرار میدهیم $\bar{A} = A \cup A'$

در این صورت A بسته است اگر و تنها اگر $A = \bar{A}$.

تمرین: ۱) $\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq F,\ F \text{ بسته}} F$ و بنابراین کوچکترین مجموعه بسته حاوی A می‌شود

۲) $\bar{\bar{A}} = A$

۲۱/

مثال:

$a_n = (1+\frac{1}{n})\cos n\pi \Rightarrow A = \{1, -1\}$

$1 \quad -1$ زیر دنباله $\Rightarrow \limsup a_n = 1, \quad \liminf a_n = -1$

مثال $a_n = 5n\cos n\pi - n^2$

$a_n \le 5n - n^2$

$\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$

~~تمرین: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ اگر f و g روی فضاهای مربوطه پیوسته باشند آنگاه $f \circ g$ نیز چنین است.~~

فشردگی:

۱) برای $A \subseteq X$، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز $\{V_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ را یک پوشش باز A نامند هرگاه $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$.

۲) A فشرده نامیده می‌شود هرگاه، هر پوشش باز حاوی زیرپوشش متناهی باشد یعنی

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda \quad \text{و} \quad A \subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$$

مثال: هر زیرمجموعه متناهی از X فشرده است.

حل:

$$A = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{و} \quad \cancel{A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha} \quad A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda \; ; \; x_i \in V_{\alpha_i} \Rightarrow A \subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$$

مثال: $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ فشرده نیستند

$$\mathbb{N}, \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

ولی زیرپوشش متناهی ندارند

تمرین: (اشتراک کانتور) اگر X فشرده و (F_n) دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X باشند آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

(به برهان خلف و فشردگی X)

حل: اگر $\phi = F_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n = \bigcap_{1}^{\infty} F_n$ پس $F_1 \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n^c$ که هر F_n^c باز است و چون F_1 فشرده است پس $\exists n$ که $F_1 \subseteq F_2^c \cup \dots \cup F_n^c$ یعنی $F_n = \bigcap_{1}^{n} F_n = \phi$ که تناقض است.

اثبات قضیه ۱ ص ۲۳:

یک عضو بی‌نهایت بار تکرار شده و آن‌ها زیردنباله همگرا

اگر A فشرده و $(x_n)_n \subseteq A$. (متوجه‌ایم فرض عدد دنباله نامتناهی است چون حالت متناهی واضحست که)

نشان می‌دهیم که یک نقطه حد دارد. اگر نه باید به هر نقطه از A حد برای (x_n) نیست

یعنی برای هر $z \in A$ همگای چون $B_{r_z}(z)$ وجود دارد که حداکثر نامتناهی از اعضای دنباله

در آن می‌باشند

$$A \subseteq \bigcup_{z \in A} B_{r_z}(z)$$

از تعریف فشردگی

$$\exists z_1, \dots, z_n \in A; \quad A \subseteq B_{r_{z_1}}(z_1) \cup \dots \cup B_{r_{z_n}}(z_n)$$

و این است تعداد متناهی از جوابها است که تناقض است.

و A نامتناهی

برعکس فرض کنید A فشرده دنباله‌ای است و $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ که V_α ها باز هستند

خلف: اگر فشرده نباشد پس زیرپوشش متناهی ندارد.

~~به این معنی دنباله از V_α ها مانند V_{α_n} ها~~:

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \Rightarrow \exists x_1 \in A \setminus V_{\alpha_1}$$

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \Rightarrow \exists x_2 \in A \setminus V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}$$

$$\vdots$$

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \Rightarrow \exists x_n \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

$$\vdots$$

در این صورت $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ و از تعریف فشردگی دنباله‌ای A دارای زیردنباله

همگرا به نقطه‌ای از A است یعنی

$$\exists x_0 \in A, \exists x_{n_k}; \quad x_{n_k} \longrightarrow x_0$$

پس $x_0 \in A$ ولی

$$\exists k: \quad x \in V_k \Rightarrow \exists N; \quad x_n \in V_k \quad n \geq k \quad \times$$

با تناقض

در واقع قسمت آخر اینکه در فضای متریک هر لیندلف متشکل پس کامپکت واقع

پوشش شمارا کامپکت بود.

۱۳

- تعریف: گوییم $A \subseteq X$ فشردگی دنباله‌ای دارد هرگاه هر دنباله در آن دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد

در آن

قضیه ۱: $A \subseteq (X,d)$ فشرده است اگر و تنها اگر فشرده دنباله‌ای باشد.

از این بعد با فضاهای متریک سروکار داریم

قضیه (پایداری فشردگی)

اگر $X \xrightarrow{f} Y$ پیوسته و $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه $f(K)$ فشرده است.

اثبات: کافیست فشرده دنباله‌ای باشد پس برای یک دنباله دلخواه $f(x_n) \subseteq f(K)$

چون $(x_n) \subseteq K$ پس دارای زیردنباله همگراست

$$x_{n_k} \to x_0 \in K \xRightarrow{f \text{ پیوسته}} f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$

گزاره: اگر $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه بسته و کراندار است.

اثبات: کراندار: خلف اگر به کران

$\forall x_0$

$\exists (x_n) \subseteq K;\quad d(x_n, x_0) \to +\infty$

A داخل گویی قرار نمی‌گیرد

$d(x_{n_k}, x_0) \to +\infty$

$\exists x_{n_k};\quad x_{n_k} \to z \in K \Rightarrow$ اما همگرایی کراندار را می‌دهد

$\times$

بسته بودن: کافیست $\bar{K} \subseteq K$.

خلف:

$\exists x_0 \in \bar{K};\quad x_0 \notin K \Rightarrow \exists x_n;\quad x_n \to x_0$ از نقاط تمایز K

از فشردگی K، (x_n) زیردنباله (x_{n_k}) دارد که همگرا به یک نقطه $z \in K$ است

پس $x_{n_k} \to z$ اما باید $x_{n_k} \to x_0$ پس $x_0 = z \in K$

$\times$

توابع هولدر و لیپ‌شیتس

در اینجا کلاس‌هایی از توابع که در بین دیگران اهمیت ویژه‌ای دارند خصوصاً در نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را معرفی می‌کنیم. ~~در این قسمت $A=[a,b]$ و $Y=\mathbb{R}$~~.

تعریف یک: تابع $f: X \to Y$ بین دو فضای متریک پیوسته لیپ‌شیتس نامیده می‌شود هرگاه ثابت مثبت M چنان موجود باشد که

$$d(f(x), f(y)) \le M\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

به کوچکترین چنین M ثابت لیپ‌شیتس f گفته می‌شود.

دو) تابع f پیوسته هولدر با توان $\alpha \in (0,1]$ گفته می‌شود هرگاه ثابت M چنان موجود باشد که

$$d(f(x), f(y)) \le M\,(d(x,y))^{\alpha} \quad \forall x,y \in A$$

تذکر: یک پیوستگی هولدر برای $\alpha=1$ همان پیوستگی لیپ‌شیتس است.

دو) پیوستگی هولدر پیوستگی یکنواخت را نتیجه می‌دهد زیرا کافیست $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ در نظر بگیریم.

سه) توابع انقباضی دارای ثابت لیپ‌شیتس $M<1$ می‌باشند و بالعکس.

(f انقباضی است هرگاه ثابت $0<M<1$ موجود داشته باشد که $d(f(x),f(y)) \le M\, d(x,y)$ $\forall x,y$)

مثال: یک) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $|f'(x)| \le M$ $\forall x\in[a,b]$ آنگاه از قضیه مقدار میانگین برای هر $x,y\in[a,b]$

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)(x-y)| \le M|x-y|$$

دو) $f(x)=\sqrt{x}:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته لیپ‌شیتس نیست ولی پیوسته هولدر از مرتبه $\frac{1}{2}$ است زیرا

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \sqrt{|x-x'|}$$

از طرفی

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

که سمت راست کراندار نیست.

قضیه: اگر $f: X \to X$ تابعی انقباضی باشد که در آن X فضای متریک کامل است. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصر بفردی است.

(یعنی $\exists! x_0 \in X \; ; \; f(x_0) = x_0$.)

اثبات: $x_1 \in X$ را به دلخواه انتخاب کنید و به استقراء

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

در این صورت

$n+1 < m$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_m) &\le d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= d(f(x_n), f(x_{n+1})) + \dots + d(f(x_{m-2}), f(x_{m-1})) \\ &\le M\, d(x_n, x_{n+1}) + \dots + M\, d(x_{m-2}, x_{m-1}) \\ &\le M^2 d(x_{n-1}, x_n) + \dots + M^2 d(x_{m-3}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\le M^n d(x_1, x_2) + \dots + M^{m-2} d(x_1, x_2) \\ &= d(x_1, x_2)\left(M^n + \dots + M^{m-2}\right) \end{aligned}$$

اما $\sum_1^\infty M^k$ سری همگرایی است پس در شرط کشی صدق می‌کند

یعنی جمله سمت راست برای N و $n, m > N$ برای یک N مناسب از ϵ کمتر می‌شود یعنی (x_n) دنباله‌ای کشی خواهد شد و چون Θ فضای کامل است به نقطه x_0 همگرا می‌شود.

برای یکتایی اگر z نقطه ثابت دیگری باشد پس $0 \neq d(x_0, z)$

$$d(x_0, z) = d(f(x_0), f(z)) \le M\, d(x_0, z)$$

که نشان می‌دهد $1 \le M$ و تناقض است.

تمرین: برای $A, B \subseteq X$

(۱) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

(۲) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(۳) A در X چگال نامیده می‌شود هرگاه $\bar{A} = X$. نشان دهید اگر $A \subseteq B \subseteq X$ و A در X چگال باشد B نیز چنین است.

(۴) اعداد اصم و اعداد گویا در R چگالند.

(۵) $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 2^n \end{matrix} \right\}$ در $[0,1]$ چگال است.

(۶) اجتماع هر تعداد از زیرمجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است.

(۷) اجتماع هر تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته است و اشتراک هر تعداد از زیرمجموعه‌های بسته ضرورتاً بسته است.

پیوستگی

برای دو فضای متریک (X,d) و (Y,ρ) و تابع $f:X\to Y$ ، $x_0\in X$

تعریف: f را در x_0 پیوسته نامیم هرگاه

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0:\ \begin{cases}\forall x\in X\\ d(x,x_0)<\delta\end{cases} \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\epsilon$$

یعنی

$$x\in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in B_\epsilon(f(x_0))$$

$$\equiv x\in f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$$

$$\equiv B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$$

یعنی x_0 نقطه درونی برای تصویر وارون هر همسایگی $f(x_0)$ شود

مثال: $f:X\to\mathbb{R}$ با

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 1 & x=2\end{cases}$$

که

$$X=[0,1]\cup\{2\}$$

آیا f در ۲ پیوسته است زیرا

$$\forall\epsilon>0,\ \delta=\frac{1}{2};\ \begin{cases}|x-2|<\frac{1}{2}\\ x\in X\end{cases} \Rightarrow |f(x)-f(2)|<\epsilon$$

تنها امکان $x=2$

۸۶

مثال: اگر (X,d) متریک باشد آنگاه $x_0 \in X$ و

$$f(x) = d(x, x_0)$$

نگاشتی پیوسته در هر نقطه مانند x است

علت:

$$|f(y) - f(x)| = |d(y, x_0) - d(x, x_0)|$$

$$\leq \quad '' \quad + \quad ''$$

$$= d(y, x_0) - d(x_0, x) \leq d(y, x)$$

پس $y \to x$ نتیجه میدهد $f(y) \to f(x)$.

تعریف: اگر $x_0 \in X$ و $A \subseteq X$، فاصله x_0 تا A را این طور تعریف می‌کنیم

$$d(x_0, A) = \inf_{y \in A} d(x_0, y)$$

تمرین ۱)

$$x_0 \in \bar{A} \iff d(x_0, A) = 0$$

۲) مشابه مثال قبل $g(x) = d(x, A)$ نیز تابعی پیوسته است

۳) تابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = \frac{m}{n} ; (m,n) = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این تابع در نقاط اصم پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است.

گزاره: $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,\rho)$ در x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

(این نوع پیوستگی را پیوستگی دنباله‌ای گوییم)

اثبات: اگر در x_0 پیوسته باشد

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\epsilon$$

حال چون $x_n \to x_0$ پس

$$\exists N>0 \quad \forall n\geq N \Rightarrow d(x_n,x_0)<\delta$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_n),f(x_0))<\epsilon$$

$$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

بالعکس: برهان خلف اگر ناپیوسته باشد

$$\exists \epsilon>0 \quad \forall N>0 \quad \exists \delta_N \geq N; \quad \exists x_\delta; \quad d(x_\delta,x_0)<\delta \text{ و } \rho(f(x_\delta),f(x_0))\geq\epsilon$$

اگر x_δ نظیر δ_N را برای $\delta=\frac{1}{n}$ با x_n نشان دهیم پس

$$x_n \to x_0 \quad \& \quad f(x_n) \not\to f(x_0)$$

که تناقض

تمرین: $X \xrightarrow{f} Y$ باز است اگر و تنها اگر $f^{-1}(V)$ برای هر $V\subseteq Y$ باز در محدوده‌ای باز باشد.

تمرین: در همه‌ی تکیه برای سه فضای متریک X و Y و Z دو تابع $X \xrightarrow{f} Y$ و $Y \xrightarrow{g} Z$ پیوسته باشند آنگاه $g\circ f$ نیز پیوسته است.

۲۷/

تمرین: اگر $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ در x_0 برای فضای متریک X پیوسته باشند آنگاه،

(۱) $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است. در حالتی که $n=1$ و $g(x_0) \neq 0$ آنگاه

$\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

(۲) اگر $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n},\ (m,n)=1 \end{cases}$ آنگاه f در تمام نقاط حقیقی حد دارد.

(۳) نقطه‌ای را معین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ پیوسته است.

(۴) نقطه‌ای را معین کنید که تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

پیوسته یکنواخت

تعریف: $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,\rho)$ را پیوسته یکنواخت گوییم هرگاه

$$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \ : \ d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))<\epsilon \quad \forall x,y\in X$$

بنابراین

f پیوسته یکنواخت نیست $\Leftrightarrow \sim($ رابطه فوق $)$

$$\equiv \exists \epsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x_\delta, y_\delta \ ; \ d(x_\delta,y_\delta)<\delta \ , \ \rho(f(x_\delta),f(y_\delta))\geq\epsilon$$

مثلاً $\delta=\frac{1}{n}$ $\exists x_n, y_n \ ; \ d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$ و $\rho(f(x_n),f(y_n))\geq\epsilon$

مثال: $f(x)=\frac{1}{x}$ روی $(0,\infty)$ پیوسته است و پیوسته یکنواخت نیست

علت:

$$x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{2}{n} \Rightarrow |x_n-y_n|=\frac{1}{n}\to 0$$

$$|f(x_n)-f(y_n)| = n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\geq\frac{1}{2}=\epsilon$$

تعریف: $X \xrightarrow{f} Y$ را لیپشیتس نامیم هرگاه

$$\exists M>0 \ ; \ \rho(f(x),f(y))\leq M\, d(x,y) \quad \forall x,y\in X$$

در صورتیکه $0<M<1$ آنگاه f را انقباضی نامیم

قضیه: ۱) هر تابع لیپشیتس پیوسته یکنواخت است.

۲) اگر تابعی $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ کراندار باشد آنگاه f لیپشیتس است.

گزاره: تابع f پیوسته یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر دو دنباله (x_n) و (y_n) از E که $d(x_n,y_n)\to 0$ نتیجه دهد $d(f(x_n),f(y_n))\to 0$.

اثبات: اگر f پیوسته یکنواخت باشد و دو دنباله (x_n) و (y_n) با شرط $d(x_n,y_n)\to 0$ مفروض باشند آنگاه:

$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0;$ تعریف پیوستگی یکنواخت

$\exists N>0;\quad n\geq N \Rightarrow d(x_n,y_n)<\delta$

$\Rightarrow d(f(x_n),f(y_n))<\epsilon$

$\Rightarrow d(f(x_n),f(y_n))\to 0$

بالعکس: اگر شرط قضیه برقرار باشد و مطابق حالت در پیوسته یکنواخت نباشد مطابق توضیح قبل

$\exists (x_n),(y_n);$

$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}, \quad d(f(x_n),f(y_n))\geq \epsilon$

$\Rightarrow d(x_n,y_n)\to 0 \quad , \quad '' \not\to 0$

که تناقض است.

مثال: (۱) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2$ پیوسته یکنواخت است چرا که $M:=2\max\{|a|,|b|\}$ آنگاه $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$

(۲) $f(x)=x^2$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست چرا که

$x_n=n,\ y_n=n+\frac{1}{n}$

در این صورت $d(x_n,y_n)=\frac{1}{n}\to 0$ اما

$|f(x_n)-f(y_n)|=\frac{1}{n^2}+2\not\to 0.$

قضیه: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ پیوسته و X فشرده باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است

اثبات: خلف

$\exists (x_n,y_n)$; $d(x_n,y_n)\to 0$

$\exists \epsilon>0$ $\quad \rho(f(x_n),f(y_n))\geq \epsilon$

از فشردگی می‌توان فرض نمود (در حد زیردنباله)

$$x_n\to x_0$$
$$y_n\to y_0 \Rightarrow d(y_n,x_0)\leq d(y_n,x_n)+d(x_n,x_0)\to 0 \Rightarrow y_n\to x_0$$

$$\epsilon\leq \rho(f(x_n),f(y_n))\leq \rho(f(x_n),f(x_0))+\rho(f(x_0),f(y_n))$$
$$\to 0$$

تمرین: ۱) اگر $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ آنگاه f پیوسته یکنواخت است

۲) از تمرین ۱ نتیجه بگیرید $\frac{\sin x}{x}$ بر $(0,\infty)$ پیوسته یکنواخت است

قضیه: در $\mathbb{R}^n$، هر مجموعه بسته و کراندار فشرده است (هاینه-بورل)

اثبات: دنباله (x_n) در $K\subseteq\mathbb{R}^n$ در نظر.

(x_n) متناهی $\Rightarrow$ یک عضو نامتناهی تکرار $\Rightarrow$ زیردنباله همگرا دارد

(x_n) نامتناهی $\Rightarrow$ (در فرض کراندار) $\xrightarrow{\text{بولتسانو-وایرشتراس}} \exists x_{n_k}\to x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0\in\overline{K}$

$\Rightarrow$ K بسته بودن $\Rightarrow$ $x_0\in K$

قضیه مقدار اکسترمم

اگر $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ پیوسته و X فشرده آنگاه نقاط اکسترمم خود را اختیار می‌کند یعنی

$$\exists x_0, x_1 \in X ; \quad f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$$

$$f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x)$$

اثبات: ابتدا $-\infty < \inf f , \sup f < +\infty$ پس

$$\exists x_n \in X ; \quad f(x_n) \longrightarrow \inf_{x \in X} f(x)$$

$$\exists y_n \in X ; \quad f(y_n) \longrightarrow \sup_{X} f$$

اما X فشرده پس زیردنباله‌ای دارد (برای راحتی نمایش با همان اندیس نشان می‌دهیم)

$$\begin{matrix} x_n \longrightarrow x_0 \\ y_n \longrightarrow x_1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} f(x_n) \begin{cases} \longrightarrow f(x_0) \\ \xrightarrow{\text{اما}} \inf_X f \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = \inf f$$

$$f(y_n) \begin{cases} \longrightarrow f(x_1) \\ \xrightarrow{\text{اما}} \sup_X f \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = \sup_X f$$

همبند

$U, V \neq \phi$

$$\begin{cases} U \cap V = \phi \\ U \cup V = X \end{cases}$$

تعریف: ۱) (U, V) را یک جداسازی X نامند هرگاه

۲) X را همبند نامند هرگاه جداسازی برای آن وجود نداشته باشد.

مثال: $\mathbb{Q}$ ناهمبند است

$$U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$$

تمرین: ۱) تنها زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$، فواصل می‌باشند

۲) هر زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ محدب است. (راهنمایی: حالت با اینکه از $x,y\in E$ و $x<z<y$ بتوان $z\in E$ را نتیجه گرفت، به کمک خلف و $A=(-\infty,z)\cap E$ و $B=(z,+\infty)\cap E$

۳) اگر $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های همبند X که $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ آنگاه $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ همبند است.

۴) اگر $X \xrightarrow{f} Y$ پیوسته و $A\subseteq X$ همبند آنگاه $f(A)$ همبند است.

(قضیه پایداری همبندی)

۵) (قضیه مقدار میانی)

اگر X ترکیب همبند و $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ پیوسته و $x,y\in X$ و k نقطه‌ای میان $f(x), f(y)$ باشد آنگاه

$$\exists z\in X;\quad f(z)=k$$

(کافیست توجه کنیم $f(X)$ در $\mathbb{R}$ همبند است پس به صورت یک فاصله باید بوشد)

تمرین ← صفحه بعد

دنباله توابع

به خانواده $f_n: X\to Y$ یک دنباله از توابع گویند.

انواع همگرایی در دنباله توابع

1) $f_n \xrightarrow{p.w} f$ همگرایی نقطه‌وار $\equiv \forall x, \forall \epsilon>0, \exists N(\epsilon,x)>0;\ \forall n\geq N \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x))<\epsilon$

2) $f_n \xrightarrow{u} f$ همگرایی یکنواخت $\equiv \forall \epsilon>0, \exists N(\epsilon)>0;\ \forall n\geq N\ \ \rho(f_n(x), f(x))<\epsilon \quad \forall x$

تمرین (۱): اگر A و B زیرمجموعه‌های از هم جدا شده $\mathbb{R}^n$ باشند و $a \in A$ و $b \in B$ و

$$p(t) = (1-t)a + tb \qquad t \in \mathbb{R}$$

و $A_0 = p^{-1}(A)$ نیز $B_0 = p^{-1}(B)$ آنگاه A_0 و B_0 نیز از هم جدا شده، در $\mathbb{R}$ می‌باشند.

نشان دهید t_0 در $(0,1)$ وجود دارد که $p(t_0) \notin A \cup B$ و سرانجام ثابت کنید هر زیرمجموعه محدب در $\mathbb{R}^n$ همبند است.

(۲): اگر A و B زیرمجموعه‌های فشرده‌ای از $\mathbb{R}$ باشند آنگاه، $A \times B$ در $\mathbb{R}^2$ فشرده است.

(۳): اگر M یک فضای متریک کامل باشد و $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و کراندار در M به طوری که

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

$$\operatorname{diam} F_n \to 0$$

ثابت کنید $\bigcap_{1}^{\infty} F_n$ دقیقاً یک عضو دارد.

(۴) . .

مشتق

تابع $f: J=(a,b)\to\mathbb{R}$ را در $x_0\in J$ مشتق‌پذیر نامیم هرگاه

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود باشد که این مقدار را با $f'(x_0)$ مطابق قرارداد نشان می‌دهیم.

گزاره: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

اثبات: به سادگی با تغییر متغیر $x-x_0=h$ بدست می‌آید.

گزاره: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه در x_0 پیوسته است.

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}0.$$

گزاره: اگر $f,g:J\to\mathbb{R}$ و $x_0\in J$ و a عددی داده شده. در این صورت $af+g$ در x_0 مشتق‌پذیر است و

که هر دو در x_0 مشتق‌پذیرند

$$(af+g)'(x_0)=af'(x_0)+g'(x_0)$$

اثبات: به سادگی از تعریف حد بدست می‌آید

گزاره (قاعده زنجیره‌ای): اگر g در x_0 و f در $g(x_0)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه $f\circ g$ در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$(f\circ g)'(x_0)=g'(x_0)f'(g(x_0))$$

$$\frac{f\circ g(x_0+h)-f\circ g(x_0)}{h}=\frac{\left[f(g(x_0+h))-f(g(x_0))\right]\cdot\left[g(x_0+h)-g(x_0)\right]}{h\cdot\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right)}\to g'(x_0)f'(g(x_0))$$

مثال: $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در ۰ مشتق‌پذیر نیست ولی در سایر نقاط است.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

موجود نیست

قضیه رل و مقدار میانگین - روش‌های تقریبی قضیه تیلور

اگر $f:X\to\mathbb{R}$ تابع باشد گوییم f در $x_0\in X$ ماکزیمم موضعی (مینیمم موضعی) دارد هرگاه در یک همسایگی از x_0 باشد $B_r(x_0)$:

$f(x)\le f(x_0)$ یا $(f(x_0)\le f(x))$

قضیه: اگر $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ در x_0 ((a,b)) مشتق‌پذیر و به ماکزیمم (مینیمم) موضعی برسد آنگاه $f'(x_0)=0$.

اثبات: مثلاً $r>0$ هست که در $B_r(x_0)\cap[a,b]$ به ماکزیمم خود در x_0 می‌رسد اما

$$\left.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|_{(x_0-r,\,x_0)}\ge 0 \quad , \quad \left.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|_{(x_0,\,x_0+r)}\le 0$$

$x_0-r \quad x_0 \quad x_0+r$

که نشان می‌دهد $f'(x_0)=0$

قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته:

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته، (a,b): مشتق‌پذیر آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که

$$(f(b)-f(a))g'(c)=[g(b)-g(a)]\cdot f'(c)$$

اثبات:

$$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x) \Rightarrow h(a)=h(b)$$

h ثابت $\to h'(x_0)=0$ ✓

h ثابت نیست $\Rightarrow$ h اکسترمم نمی‌گیرد $\Rightarrow 0=h'(x_0)$

۳۵

قضیه مقدار میانگین: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته

$(a,b)\to$: مشتق‌پذیر

آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

کافیست $g(x)=x$ بگیریم.

گزاره: اگر $0\le f'$ ← f صعودی

$f'\le 0$ ← نزولی

اثبات:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ \exists x_0\ f'(x_0) \qquad x_1<x_2$$

و چون مخرج مثبت است پس علامت صورت و علامت $f'(x_0)$ تبعیت دارد.

قضیه رل:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و $f'(a)<\lambda<f'(b)$ آنگاه

(a,b) : مشتق‌پذیر

$x_0\in(a,b)$ وجود دارد که $\lambda=f'(x_0)$

اثبات: $g(x)=f(x)-\lambda x$

آنگاه $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته

$(a,b)\to$: مشتق‌پذیر

$$\begin{cases} g'(a)<0 \\ g'(b)>0 \end{cases}$$ از طرفی g در

$x_0\in[a,b]$ مینیمم دارد $\Leftarrow$ $g'(x_0)=0$

$x_0\neq a,b$

$\Rightarrow x_0\in(a,b)$

گزاره: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{N}$ و مشتقات f تا مرتبه n روی (a,b) موجود است.

اگر
$$p(x):=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که
$$f(b)=p(a)+\frac{f^{(n)}(x_0)\,(b-a)^n}{n!} \qquad (*)$$

تذکر: در حالت $n=1$ همان مقدار میانگین است و با دانستن کرانی برای $f^{(n)}(x_0)$ می‌توان خطا محاسبه تقریب با چند جمله‌ای را یافت نمود

$$f(b)\simeq p(a)$$

با میزان خطای $\left|\frac{f^{(n)}(x_0)(b-a)^n}{n!}\right|\le M\frac{(b-a)^n}{n!}$ (M کران $f^{(n)}(x_0)$ است.

اثبات:

$$g(x):=f(x)-p(x)-M(x-a)^n$$

$$\Rightarrow\quad g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-n!M$$

از طرفی

$$g^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)\qquad k=0,\dots,n-1$$

$$g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n-1)}(a)=0$$

$\exists x_1\in(a,b)$; $g'(x_1)=0$ و $g(b)=0$

$$\begin{cases} g'(x_1)=0\\ g'(a)=0\end{cases}\Longrightarrow \exists x_2;\ g''(x_2)=0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_n;\ g^{(n)}(x_n)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(n)}(x_n)=n!M$$

$\Leftarrow$ M معلوم و

نتیجه حاصل

حال اگر خطا به سمت صفر میل کند آنگاه با حد $(*)$ و $n\to\infty$

$$f(b)=\sum\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n\qquad \forall b.$$

پس

$$f_n \xrightarrow{u} f \equiv \sup_{x\in X} \rho(f_n(x), f(x)) \to 0$$

در تعریف اولش است که $f_n \xrightarrow{u} f$ ، نتیجه میدهد $f_n \xrightarrow{p.w} f$ ولی عکس آن برقرار نیست

مطابق مثالی که میآید. قبل از آن

$$f_n \not\xrightarrow{u} f$$

$$\equiv \exists \epsilon>0;\ \forall N(\epsilon),\ \exists n\geq N(\epsilon);\ \exists x_n\in X\ \ \rho(f_n(x_n), f(x_n)) \geq \epsilon$$

مثال: $f_n(x)=\frac{x}{n}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{p.w} 0=f$ واقعاً و $\left[\begin{array}{l} x_n = n \\ |f_n(x_n)-f(x_n)| = 1 \geq \frac{1}{2}=\epsilon \end{array}\right]$

$$\Downarrow$$

$$f_n \not\xrightarrow{u} f$$

مثال:

$$f_n(x)=\begin{cases} n & x\in(0,\frac{1}{n}) \\ 0 & x\in[\frac{1}{n},+\infty) \end{cases}$$

$f_n \xrightarrow{p.w} 0=f$ ، $\left[x_n=\frac{1}{2n}\ ,\ |f_n(x)-f(x)| = |n-0| = n \geq 1\right]$

همگرایی یکنواخت نیست

اگر X یک فضای نرم دار باشد قرار میدهیم

$$B(X,\mathbb{R}) = \{f: X\to\mathbb{R} \mid f \text{ تابعی کراندار است}\}$$

و نرم روی آن بدین شرح تعریف میگردد:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

تمرین: $B(X,\mathbb{R})$ با جمع و ضرب اسکالر و چنین نرم یک فضای نرم دار است.

$$f_n \to f$$

$$\equiv \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

$$\equiv \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\equiv f_n \xrightarrow{u} f$$

مثال:

$f_n(x) = x^n$ روی $[0,1]$.

$$f_n \xrightarrow{p.w} \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x\in[0,1) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_n = 1-\frac{1}{n} \quad n\geq 2 \\ \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x)| = (1-\frac{1}{n})^n - 0 \to e^{-1} \geq \frac{1}{2}e^{-1} = \epsilon \end{array}\right]$$

n بزرگ

همگرایی یکنواخت نیست

(X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

مثال: ۱) اگر X فشرده باشد کامل است

$$\text{کشی } (x_n) \subseteq X \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_0 \in X$$

$$\xRightarrow{\text{تمرین}} x_n \nearrow$$

۲) $\mathbb{R}^n$ کامل است.

زیرا هر دنباله کشی کراندار و طبق بولتزانو وایرشتراس زیردنباله همگرا دارد و مطابق تمرین در حالت ۱) مثال قبل خود دنباله همگرا می‌شود.

قضیه: $B(X,\mathbb{R}^n)$ کامل است

اثبات: اگر $(f_n) \subseteq B(X,\mathbb{R}^n)$ کشی باشد

$$\forall x\in X \; ; \quad 0 \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \to 0$$

پس $(f_m(x))_m$ در $\mathbb{R}^n$ کشی است از ۲) مثال قبل

$$f_n(x) \longrightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{حد}} \in \mathbb{R}^n$$

از مشخص بودن حد f یک تابع می‌شود

۳۹

و $f_n \xrightarrow{p.w} f$ ، ۱

$\forall x: \quad \|f(x)\|_\infty = \|f(x) - f_N(x) + f_N(x)\|_\infty$

$\leq \cancel{\|f - f_N\|} \; \epsilon + \underbrace{\|f_N\|_\infty}_{\text{عدد}} \Rightarrow f \in B(X, \mathbb{R}^n)$

$\forall x:$

$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \underset{\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}}{\overset{\exists m \geq N(\epsilon, x) \text{ بزرگ}}{\leq}} \|f_n(x) - f_m(x)\|_\infty + \|f_m(x) - f(x)\|_\infty$

$\overset{\text{اگر}}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$m \geq N, M$ که در تعریف کشی انتخاب گردد

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

قضیه دینی:

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$ پیوسته

X فشرده

(f_n) یکنوا

$f_n \xrightarrow{p.w} f$; f پیوسته

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

اثبات: اگر $g_n = f_n - f$ آنگاه باید ثابت شود $g_n \xrightarrow{u} 0$ که از فرض

$\begin{cases} g_n \text{ پیوسته} \\ g_n \xrightarrow{p.w} 0 \\ g_{n+1} \leq g_n \quad \forall n \end{cases}$

نزولی (f_n) مثلاً

$\epsilon > 0$; $G_n = \{x \mid g_n(x) < \epsilon\} = g_n^{-1}(-\infty, \epsilon)$ باز ✓

$\Rightarrow X = \bigcup G_n \xrightarrow[\text{میتوان فرض}]{\text{فشردگی}} X = G_1 \cup \dots \cup G_m$

$\Rightarrow \forall x \in X \rightarrow g_1(x) < \epsilon$ یا $\vdots$ $g_m(x) < \epsilon \xrightarrow[k \geq m]{\text{صعودی بودن}} g_k(x) < \epsilon \Rightarrow g_k \xrightarrow{u} 0$ $\forall x$

~~تمرین: $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$~~

تمرین: ۱) $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$ بر $[0,1]$ همگرای یکنواخت است.

(از قضیه دینی استفاده کنید)

۲) بدون شرط فشردگی برقرار کردن است بنابر مثالی ارائه دهید.

قضیه: $X \xrightarrow[\text{پیوسته}]{f_n} \mathbb{R}^p$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ آنگاه f پیوسته

اثبات: برای $0<\epsilon$ و $x_0 \in X$ (فضای متریک) از همگرای یکنواخت

$\exists N=N(\epsilon)>0$; $\|f_n-f\|_\infty<\epsilon$

$n\geq N$

$\Rightarrow$ ~~$\|f_n(x)-f_n(x_0)\|\leq\|f_n$~~

$$\|f(x)-f(x_0)\| \leq \|f(x)-f_n(x)\| + \|f_n(x)-f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0)-f(x_0)\|$$

$$< \|f-f_n\|_\infty + \underbrace{\epsilon}_{\text{پیوستگی } f_n} + \|f_n-f\|_\infty$$

$$< 3\epsilon$$

پس f در x_0 پیوسته

قضیه $C_b(X,\mathbb{R}^p)$ کامل است (توابع پیوسته از X به $\mathbb{R}^p$)

اثبات: ~~هر دنباله کشی~~ ساده‌تر حالت $B(X,\mathbb{R}^p)$ هر دنباله کشی به یک f همگراست ولی کامل بود پس $f_n \xrightarrow{u} f$

که ~~$f\in B(X,\mathbb{R}^p)$~~ قضیه قبل $f\in C(X,\mathbb{R}^p)$.

۴۱

انتگرال ریمان

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ کراندار و P افرازی با نقاط

$$P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\},\quad \begin{cases} M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \\ m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} U(P,f)=\sum M_i\Delta x_i \\ L(P,f)=\sum m_i\Delta x_i \end{array}$$

پرسش: $L(P,f)\le U(P,f)$

گزاره: اگر P' ظریفتر از P باشد بعنی $P\subseteq P'$ آنگاه

$$L(P,f)\le L(P',f)\le U(P',f)\le U(P,f)$$

تعریف

$$\overline{\int_a^b} f=\inf_P U(P,f),\quad \underline{\int_a^b} f=\sup_P L(P,f)$$

در صورتیکه $\overline{\int}=\underline{\int}$ آنگاه f را انتگرال‌پذیر و با $\int f$ نشان

قضیه

f انتگرال‌پذیر است $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\ \exists P_\epsilon;\ U(P_\epsilon,f)-L(P_\epsilon,f)<\epsilon$

اثبات: $\Leftarrow$

$$L(P_\epsilon,f)\le \underline{\int} f\le \overline{\int} f\le U(P_\epsilon,f)$$

$$\Rightarrow 0\le \underbrace{\overline{\int} f-\underline{\int} f}_{\text{عدد ثابت}}\le\epsilon$$

باید صفر باشد

$(\Rightarrow)$

$$\int f+\frac{\epsilon}{2}=\overline{\int} f+\frac{\epsilon}{2} > \overset{\exists P_1}{U(P_1,f)}$$

$$\int f-\frac{\epsilon}{2}=\underline{\int} f-\frac{\epsilon}{2} < L(P_2,f)$$

$\Rightarrow P_\epsilon=P_1\cup P_2$

از ϵ کمتر

$$\int f-\frac{\epsilon}{2}<L(P_2,f)<L(P^*,f)\le U(P^*,f)\le U(P_1,f)<\int f+\frac{\epsilon}{2}$$

قضیه: اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ بر $[a,b]$ و f_n ها انتگرال‌پذیر باشند آنگاه f نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int f_n \longrightarrow \int f$$

اثبات:

$$f_n \xrightarrow{u} f \equiv \forall \epsilon,\ \exists N(\epsilon)>0;\ \forall n \geq N \Rightarrow \sup_{[a,b]} |f_n(x)-f(x)| < \epsilon$$

$\forall P$ افراز

$$U(P, f_n - f) < \epsilon(b-a)$$

$$L(\quad) > -\epsilon(b-a)$$

$$U(P,f)-L(P,f) = U(P, f-f_n+f_n) - L(P, f-f_n+f_n)$$

$$\leq U(P, f-f_n) - L(P, f-f_n) + U(P, f_n) - L(P, f_n)$$

$$< 2\epsilon$$

$$L(P, f_n - f) \leq \int f_n - \int f = \int f_n - f \leq U(P, f_n - f)$$

$$\Rightarrow -\epsilon(b-a) \leq \int f_n - \int f \leq \epsilon(b-a) \qquad \forall n \geq N$$

~~[illegible]~~ که نتیجه می‌دهد $\int f_n \to \int f$.

تذکر: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال‌پذیر است.

علت: f بر فشرده $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است پس

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0;\ \begin{matrix} x,y\in[a,b] \\ |x-y|<\delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

از طرفی با انتخاب P به طوری که $\|P\|<\delta$، این واقعیت که

$$M_i - m_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f = \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)-f(y)|$$

در نتیجه

$$U(P,f)-L(P,f) = \sum (M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon(b-a).$$

تمرین: (۱) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ کراندار باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان است.

(۲) اگر f انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $|f|$ انتگرال‌پذیر است و

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

(۳) اگر $m \le f(x) \le M$ $\forall x\in[a,b]$ آنگاه $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$

(۴) اگر f در $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_0^1 f = \lim \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

(۵) به طور کلی اگر f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

(۶) تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

(۷) اگر f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند آنگاه $cf+g$ نیز انتگرال‌پذیر است و c عدد ثابت

$$\int_a^b cf+g = c\int_a^b f + \int_a^b g$$

(۸) اگر ---------- و $f \le g$ آنگاه

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

(۹) در صورتی که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان و $a<c<b$ آنگاه f بر هر دو فاصله $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(۱۰ $\int_a^a f = 0$.

۱۱) اگر $\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ (به طور مشابه $\int_{-\infty}^{c} f = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f$) تعریف گردد

نیز $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^{+\infty} f$ و این نوع انتگرال‌ها ناسره نامیده می‌شوند

آنگاه تمرینات (۷) و (۸) و (۹) برای این حالت نیز برقرار است.

۱۲) اگر f در c از (a,b) بی‌کران یا ناپیوسته باشد $\int_a^b f$ نیز ناسره نامیده می‌شود و چنین تعریف می‌شود

$$\int_a^b f := \lim_{d\to c^-}\int_a^d f + \lim_{k\to c^+}\int_k^b f$$

در صورت وجود ثابت کنید تمرینات (۷) و (۸) و (۹) نیز برای این حالت برقرار است.

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(c)$$

اثبات: از پیوستگی f بر فشرده $[a,b]$

$\exists u,v\in[a,b]$ ، $f(u)=\min_{[a,b]} f$ ، $f(v)=\max_{[a,b]} f$

$$f(u)(b-a) \le \int_a^b f \le f(v)(b-a)$$

$$f(u) \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le f(v)$$

حال از قضیه دل

$$\exists c;\quad f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

تمرین (قضیه مقدار میانگین نیم‌بسته برای انتگرال):

اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و g تابعی نامنفی انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $c\in[a,b]$ وجود دارد که $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$

قضیه: اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ بر $[a,b]$ که هر f_n انتگرال‌پذیر ریمان است

در این صورت f انتگرال‌پذیر ریمان می‌شود و $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

علت:

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow \forall P$ افراز

$\forall n \geq N \ , \ \forall x$

$U(P, f_n - f) < \epsilon(b-a)$

$L(\quad " \quad) \geq -\epsilon(b-a)$

$$U(P,f) - L(P,f) = U(P, f - f_n + f_n) - L(P, f - f_n + f_n)$$
$$\leq U(P, f - f_n) - L(P, f_n - f)$$
$$+ U(P, f_n) - L(P, f_n)$$
$$< \epsilon \longrightarrow$$

کرانوری

قضیه کرانوری تسلطی لبگ.

$\int f_n \longrightarrow \int f$ آنگاه $|f_n(x)| \leq M$ $\forall n$ $\forall x \in [a,b]$ و $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ انتگرال‌پذیر ریمان

قضیه جابجایی حد و مشتق:

(f_n) از توابع مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ و $x_0 \in [a,b]$ که $(f_n(x_0))_n$ کشد،

$f'_n \xrightarrow{u} g$

آنگاه $f_n \xrightarrow{u} f$ و $f' = g$. $\exists f$

اثبات:

$$|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)| \overset{\exists c}{=} |(f_m - f_n)'(c)|\,|x - x_0|$$
$$\leq \|f'_m - f'_n\|_\infty \cdot |x - x_0| \longrightarrow 0$$

$\|f'_m - f'_n\|_\infty \to 0$

$\leq |(f_m - f_n)(x)| - |(f_m - f_n)(x_0)|$

f_n مشتق‌پذیر

برای یک x_0 همگرا

مطلوب (f'_n) ; $f'_n \xrightarrow{u} g$

$\therefore \exists f : \quad f_n \xrightarrow{u} f$

$, \quad f' = g$

① (f_n) کشی است زیرا:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0) + (f_m - f_n)(x_0)|$$

$$\overset{\exists y}{=} |\underbrace{(f'_m - f'_n)(y)}_{\leq \|f'_m - f'_n\|} \cdot (x - x_0) + (f_m - f_n)(x_0)|$$

$$\overset{\forall \epsilon > 0, \exists N}{<} \epsilon(b-a) + \epsilon = \alpha\epsilon$$

پس (f_n) تحت $\|\ \|_\infty$ کشی است و در نتیجه همگراست به تابعی پیوسته f.

f_n ها پیوسته اند پس f هم پیوسته

② f مشتق‌پذیر

طبق ① می‌دانیم f حول نقطه دلخواه ثابت c.

$$\left|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)\right| = \left|(x - c) \cdot (f'_m - f'_n)(z)\right|$$

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\right| \leq \|f'_n - f'_m\|_\infty \overset{\text{کوشی}}{\underset{\exists N_1}{<}} \epsilon$$

$$m \to \infty \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\right| \leq \epsilon$$

f مشتق‌پذیر و $f' = g$

$$f'_n \xrightarrow{u} g \Rightarrow \exists N_1 ; \quad |f'_n(c) - g(c)| < \epsilon$$

$$\exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f'_n(c)\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g\right| = \left|\frac{f(x) - f_n(x)}{x - c} + \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f'_n(c)\right|$$

$$|(f_m - f_n)(x)| \le \|g_n - g_m\|_\infty \cdot |x - x_0| + |(f_m - f_n)(x_0)|$$

$$< \epsilon \cdot (b-a) + \epsilon = \epsilon$$

پس (f_n) کشی تحت $\|\ \|_\infty$ که قبلاً فضای مربوطه کامل بود. پس همگراست.

برای مشتق‌پذیری

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| = \lim \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \to 0$$

هم پیوستگی:

اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع از (X, d) به (Y, ρ) باشد را هم پیوسته در x_0 نامند هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

$\delta = \delta(x_0, \epsilon)$

و هم پیوسته یکنواخت هرگاه $\delta = \delta(\epsilon)$.

قضیه: اگر X فشرده و $\mathcal{F}$ هم پیوسته آنگاه هم پیوسته یکنواخت است.

لم: فرض E شمارا و (f_n) دنباله حقیقی مقدار کراندار نقطه‌ای روی E، آنگاه زیردنباله‌ای همگرا روی E دارد.

$f_1(x_1)$ $f_2(x_1)$, ——

$f_1^1(x_2)$ $f_2^1(x_2)$, ——

$f_1^2(x_3)$ $f_2^2(x_3)$ ——

سری توابع

اگر (f_n) حقیقی مقدار (یا $\mathbb{R}^p$ مقدار)

$$S_n(x) = \sum_1^n f_n(x)$$

$\lim S_n = \sum_1^\infty f_n$ را سری

اگر $S_n \xrightarrow{p.w} \sum f_k$ → سری را همگرای نقطه‌ای

$S_n \xrightarrow{u}$ " همگرا است

مثال: $\sum x^n = \frac{x}{1-x}$

روی $(-1,1)$

اگر همگرا یکنواخت باشد

$x^n = \sum_1^n - \sum_1^{n-1} \xrightarrow{u} 0$ ×

قضیه: $f_n : X \to \mathbb{R}$ پیوسته و $\sum f_n = f$ همگرا یکنواخت باشد، f پیوسته

اثبات:

S_n پیوسته $\xrightarrow{u} f \xRightarrow{\text{از قبل}}$ f پیوسته

قضیه: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $\sum f'_n$ همگرا یکنواخت و $\sum f_n(x_0)$ همگرا

آنگاه $\sum f_n$ همگرا یکنواخت و $(\sum f_n)' = \sum f'_n$

حل:

$S'_n \xrightarrow{u} \sum f'_n$

$\xLeftarrow{\text{از قبل}}$

$S_n(x_0) \longrightarrow \sum f_n(x_0)$

قضیه: ایده کوشی

$\sum f_n$ همگرا یکنواخت $\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N > 0 : \left\| \sum_{n+1}^{m} f_k \right\| < \epsilon$

قضیه آزمون M- وایرشتراس

$|f_n(x)| \le M_n$,

$\sum M_n$ همگرا

$\therefore$ $\sum f_n$ همگرای یکنواخت

(از کنی یکنواخت)

مثال $\sum \frac{1}{n^2} \sin(4^n x)$

آزمون دیریکله:

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^q$ جمع ها جزئی به طور یکنواخت کراندار

$X \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$ دنباله نزولی و همگرای یکنواخت به ۰

$\therefore$ $\sum \varphi_n f_n$ همگرای یکنواخت.

آزمون آبل:

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^q$

$X \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$

$\sum f_n$ همگرای یکنواخت

φ_n یکنوا

(φ_n) به طور یکنواخت کراندار

$\therefore$ $\sum \varphi_n f_n$ همگرای یکنواخت

مثال‌هایی از این آزمون‌ها بیاوریم

۵۰

اثبات آزمون دیریکله:

$$\sum_n^m \varphi_k f_k = \sum_n^m \varphi_k (S_k - S_{k-1})$$

$$= \varphi_n (S_n - S_{n-1}) + \cdots + \varphi_m (S_m - S_{m-1})$$

ضرب و فاکتور

$$= \varphi_m S_m + S_{m-1}(\varphi_{m-1} - \varphi_m) + \cdots + S_n(\varphi_n - \varphi_{n+1}) - \varphi_n S_{n-1}$$

$$= \varphi_m S_m - \varphi_n S_{n-1} + \sum_n^{m-1} S_j (\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_n^m \varphi_k f_k \right\| \le |\varphi_m S_m| + |\varphi_n S_{n-1}| + \sum_n^{m-1} |S_j| \cdot |\varphi_j - \varphi_{j+1}|$$

کراندار به M

از نزولی بودن

$$\le \epsilon M + \epsilon M + M \cdot \sum_n^{m-1} \varphi_j - \varphi_{j+1} = \varphi_n - \varphi_m$$

$\exists N > 0 \; |\varphi_n(x)| < \epsilon \quad \forall x, n \ge N$

تلسکوپی

$$< 4\epsilon M$$

گرفتن یکنواخت → کوشی یکنواخت

اثبات آبل:

$$\sum_n^m \varphi_k f_k \overset{\text{ماتریس}}{=} S_m \varphi_m - \varphi_n S_{n-1} + \sum_n^{m-1} S_j (\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

$$S_j = S_j - S + S$$

$$\left| \sum_n^{m-1} S_j (\varphi_j - \varphi_{j+1}) \right| = \left| \sum_n^{m-1} \underbrace{(S_j - S)}_{\le \epsilon} (\varphi_j - \varphi_{j+1}) + \sum_n^{m-1} S (\varphi_j - \varphi_{j+1}) \right|$$

$$\le \epsilon (\varphi_n - \varphi_m) + M (\varphi_n - \varphi_m)$$

$$\le \epsilon \cdot a$$

$$\left\| \sum_n^m \varphi_k f_k \right\| = \left\| \sum_n^m \varphi_k (S_k - S_{k-1}) \right\| = \| \varphi_n S_n - \varphi_n S_{n-1} + \varphi_{n+1} S_{n+1} - \varphi_{n+1} S_n + \cdots (\varphi_{m-1} S_{m-1} - \varphi_{m-1} S_{m-2}) + (\varphi_m S_m - \varphi_m S_{m-1}) \|$$

$$= \| S_n (\varphi_n - \varphi_{n+1}) + S_{n+1} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n+2}) + \cdots + S_{m-1} (\varphi_{m-1} - \varphi_m) + \varphi_m S_m - \varphi_n S_{n-1} \|$$

$$= \| \sum_n^{m-1} \underbrace{S_k}_{\le \epsilon} \underbrace{(\varphi_k - \varphi_{k+1})}_{\le M} + \varphi_m S_m - \varphi_n S_{n-1} \| \le \epsilon + \|\varphi_m\|_M \|S_m\| + \|\varphi_n\| \cdot \|S_{n-1}\|$$

$$\le \cancel{\epsilon + M(}$$

گرایی کراندار:

f_n روی $[a,b]$

انتگرال‌پذیر

$|f_n(x)| \le M \quad \forall x, \forall n$

$f_n \xrightarrow{p.w} f$

$\Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

گرایی یکنوا:

f_n یکنوا و انتگرال‌پذیر

$f_n \xrightarrow{p.w} f$

$\Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

مثلاً صعودی

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f(x) \\ \text{مجموعه} \\ |f_n(x)| \le B = \|f_1\| + \|f\| \end{array} \right)$$

مجموعه گرایی کراندار

مثال: $0 < a$

$$\frac{\sin nx}{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad x \in [a, \pi]$$

$$\left|\frac{\sin nx}{nx}\right| \le \frac{1}{na} \xrightarrow[\text{کراندار}]{\text{گرایی}} \lim \int_a^{\pi} \frac{\sin nx}{nx} = 0 .$$

مثال

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$

سری متناوب

آزمون

$a_n \to 0 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست $\Rightarrow$ همگرا

مثال

$\sum \frac{\cos nx}{n}$ ، $2\sin\frac{x}{2}\sum_{1}^{n}\cos kx = \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}$

$\left(2\cos k\sin\frac{x}{2} = \sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x\right)$

$\Rightarrow \sum_{1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

$\to |\quad| \le \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

یکی از دیریکله سری همگراست

مثال: $\sum \frac{\sin nx}{n}$ نیز برای $x \neq 2k\pi$ همگراست.

مثال: $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ از M - وایرشتراس $M_n = \frac{1}{n^2}$ همگرای یکنواخت است.

مثال $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست و $e^{-nx} \to$ نزولی یکنوا $\xrightarrow{\text{آبل}}$ همگرا

سری توانی داخل شعاع همگرایی. و خارج آن و شعاع همگرایی مشتق با خود سری برابر است

خواص انتگرال از توابع پله‌ای

1. $$\int_a^b \left[c_1 s(x) + t(x)\right] dx = c_1 \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx$$ اگر $s(x) < t(x)$ $\forall x \in [a,b]$ آنگاه

3. $$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx$$ اگر $a < c < b$

4. $$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx$$ (پایایی تحت انتقال)

5. $$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)\,dx \qquad k > 0$$

نکته دیگر تعریف انتگرال:

اگر f تابعی کراندار بر $[a,b]$ باشد

$$S := \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \;\middle|\; s \le f \right\}, \quad T := \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \;\middle|\; f \le t \right\}$$

$\forall\, t_0, s_0$ پله‌ای ; $s_0 \le f \le t_0$ $\rightsquigarrow$ $\int_a^b s_0 \le \sup S \le \inf T \le \int_a^b t_0$

f انتگرال‌پذیر است $\underbrace{\sup S}_{\underline{I}(f)} = \underbrace{\inf T}_{\overline{I}(f)}$ و انتگرال‌پذیری هرگاه $\overline{I} = \underline{I}$

مثلاً

$$\int s_0 \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \int t_0$$

اتفاقی که انتظار نداریم

$$f_n(x)=x^n : [0,1]\to\mathbb{R} \xrightarrow{p.w} f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$ (۱

ناپیوسته

$$f_n(x)=nx(1-x^2)^n \xrightarrow[[0,1]]{p.w} 0$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{n}{2(n+1)} \not\longrightarrow \int 0=0$$ (۲

تمرین: فرض کنید $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$ ، $f(x)=\lim f_n(x)$ نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0)\neq f'(0)$$

تمرین: نشان دهید $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ به ازای هر x حقیقی همگراست و اگر مجموع را با $f(x)$ نشان دهیم آنگاه

$$\int_0^\pi f(x)\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

از انتگرال ریمان

منظور از افراز زیر فاصله $[a,b]$ دو نقطه

$x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$

ممکن است فاصله نقاط یکسان نباشد، به طور قرار داد: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و

$P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ افراز مربوطه است.

افرازی مانند P' را ظریفتر از P نامیم هرگاه $P\subseteq P'$.

- بدیهی برای دو افراز P_1 و P_2 افراز $P_1\cup P_2$ ظریف مشترک است یعنی از هر دو ظریفتر است.

- متناسب با افراز P، تابع f تابع پله‌ای است هرگاه

$$f(x)=\begin{cases} a_1 & x\in[x_0,x_1) \\ a_2 & \text{"} \ [x_1,x_2) \\ \vdots & \\ a_n & \text{"} \ [x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

و نمایش آن

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{[x_{k-1},x_k]}.$$

مثال: تابع $f(x)=[x]$ تابع پله‌ای است.

برای هر تابع پله‌ای انتگرال را به صورت

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_1^n a_k \Delta x_k$$

تعریف می‌کنیم

مثال: اگر f ثابت باشد $\int_a^b f = c(b-a)$

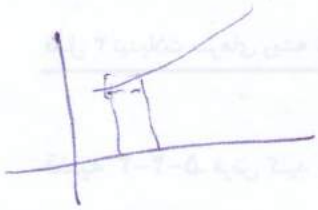
تمرین: جمع و ضرب دو تابع پله‌ای خود توابع پله‌ای اند

۵۴

قضیه: اگر f بر $[a,b]$ یکنوا باشد انتگرال‌پذیر است

۳ ——— پیوسته ———

اثبات: مثلاً صعودی.



تعریف می‌کنیم $P=\{x_0, \dots, x_n\}$

با فواصل مساوی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$t_n(x) = f(x_k), \quad s_n(x) = f(x_{k-1})$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k) \Rightarrow s_n \le f \le t_n$$

$$\int t_n - \int s_n = \sum_1^n f(x_k)\Delta x_i - \sum_1^n f(x_{k-1})\Delta x_k$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_1^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)) \longrightarrow 0$$

$$\int s_n \le \int f \le \int t_n \Rightarrow \quad \& \quad \int t_n - \int s_n = \frac{c}{n}$$

$$\Rightarrow \int_a^b s_n \le \bar{I}(f) \le \int_a^b t_n$$

$$\int_a^b s_n \le \underline{I}(f) \le \int_a^b t_n$$

$$\rightarrow 0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \int t_n - \int s_n = \frac{c}{n} \Longrightarrow$$ مقصود رسیدیم