1/

خواص جبری اعداد حقیقی

دستگاه اعداد حقیقی مجموعه‌ای از اشیاء است که اعداد حقیقی نامیده می‌شوند و با $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود و با ⊕ و ⊙

به همراه دو عمل جمع و ضرب ~~[illegible]~~ نیز با یک ترتیب که با $<$ نشان می‌دهیم (دوتایی)

و دو عضو مشخص به نام صفر و یک ~~[illegible]~~ با ۰ و ۱ نشان می‌دهیم که در اصول موضوعه ~~[illegible]~~ ذیل صدق کند گفته می‌شود.

اصول جبری: برای هر $a,b,c\in\mathbb{R}$

$A1:\ a+b=b+a$

$A2:\ (a+b)+c=a+(b+c)$

$A3:\ a+0=0+a=a$

$A4:\ a+(-a)=(-a)+a=0.$

اصول ضربی

$A5:\ a\cdot b=b\cdot a$

$A6:\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

$A7:\ a\cdot 1=1\cdot a=a$

$A8.\ \forall a\in\mathbb{R};\ a\neq 0,\ \exists a^{-1}\in\mathbb{R},\ a^{-1}a=1=aa^{-1}.$

خاصیت توزیع‌پذیری

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

تمرین ۱: اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $c\neq 0$ آنگاه از $ac=bc$ نتیجه می‌شود $a=b$.

تمرین ۲.

i) $a\cdot 0=0$ ii) $-(-a)=a$ iii) $(c^{-1})^{-1}=c$

iv) $(-1)a=-a$ v) $a(-b)=(-a)b=-ab$ vi) $(-a)+(-b)=-(a+b)$

vii) $(-a)(-b)=ab$ viii) $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$

زیرمجموعه‌های مهم از اعداد حقیقی:

با داشتن 1 متوالی $2:=1+1$ ، $3:=2+1$ ، ... ، $n+1=n+1$ ، ...

را ساخته و مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

۲

نیز

$\mathbb{Z} = \{m \mid -m \in \mathbb{N} \text{ یا } m=0\}$ ،

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

• عدد حقیقی که گویا نباشد را اصم نامیم.

اصل ترتیب: یک زیرمجموعه P از $\mathbb{R}$ وجود دارد که به اعداد مثبت (مجموعه مثبت) معروف است.

$A10: \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \in P \ \underline{\vee} \ -a \in P \ \underline{\vee} \ a=0$

$A11, \quad a, b \in P \Rightarrow a+b \in P \ , \ ab \in P.$

در این صورت a را منفی گوییم هرگاه $-a$ مثبت باشد.

$a \leq b \equiv b-a \in P$ یا $a=b$

$a < b \equiv b-a \in P$

قضیه: اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ آنگاه

یک) $a<b, \ b<c \Rightarrow a<c$

دو) $a<b \ \underline{\vee} \ b<a \ \underline{\vee} \ a=b$

سه) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

چهار) $a<b, 0<c \Rightarrow ac<bc$

پنج) $a<b, \ c<0 \Rightarrow ac>bc$

شش) $0<1, \quad -1<0$

هفت) $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$

هشت) $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

قدر مطلق

قدر مطلق یک عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

قضیه:

یک) $|ab| = |a||b|$

دو) $|a+b| \leq |a|+|b|$

سه) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

بر اساس تعریف ترتیب، بازه‌ها قابل تعریف می‌شوند

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

$(a,b) = \quad — \quad < \quad <$

$[a,+\infty) = \{x \quad — \quad a \le x\}$

میدان‌های مرتب:

هر مجموعه که با دو عمل + و . و ترتیب در اصول A1، ...، A11 صدق کند را یک میدان مرتب نامند.

مثال: $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ میدان‌های مرتب‌اند.

مثال: میدان اعداد حقیقی جبری که در واقع عددهای حقیقی هستند، چرا؟

یک عدد جبری، ریشه معادله $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ باشد.

که a_i ها ضرایب گویا اند.

~~اصل تمامیت~~

اصل کمال ددکیند:

A12: فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی است با خواص ذیل

i) $a \in A, \ b \in B \Rightarrow a < b$

ii) $\mathbb{R} = A \cup B$

آنگاه عدد حقیقی منحصر بفرد c موجود است بطوریکه

a) $a < c \Rightarrow a \in A$

b) $c < b \Rightarrow b \in B$.

زوج $\{A,B\}$ یک برش ددکیند گویند.

تذکر: اصل کمال برای $\mathbb{Q}$ نیست چرا؟ $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$

اگر c مثل بالا موجود می‌شد $c^2 \ge 2$ و $c^2 \le 2$ و بنابراین $c^2 = 2$ ناممکن است.

٤/

قضیه: عدد حقیقی c وجود دارد به طوری که $c^2=2$

اثبات: $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\geq 2\}$ را در نظر بگیرید

$\{A,B\}$ یک برش ددکیند است پس طبق اصل تمامیت c وجود دارد

$x<c \Rightarrow x^2<2$

$x>c \Rightarrow x^2\geq 2$ (۱)

$\Rightarrow (c-\epsilon)^2<2$

$(c+\epsilon)^2\geq 2$

خلف: فرض کنید $c^2\neq 2$ در این صورت $c^2>2$ یا

$c^2<2$

$\Rightarrow (c-\epsilon)^2>2$

$(c+m)^2\leq 2$

حالت ۱) اگر $c^2>2$

$c-\epsilon\in B$

(۱) $\Rightarrow \begin{cases} x<c \Rightarrow x\in A \\ x>c \Rightarrow x\in B \end{cases}$

$c^2>2 \Rightarrow (c-\epsilon)^2>2 \Rightarrow c-\epsilon\in B$

و $c-\epsilon<c \Rightarrow c-\epsilon\in A$

تناقض

$n\leq b$

$\Rightarrow n+1\leq b$

$n\leq b-1$

قضیه: اگر $\epsilon>0$ آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد که $0<\frac{1}{n}<\epsilon$

اثبات: برهان خلف

$\forall n: \ \frac{1}{n}\geq\epsilon$

$\Rightarrow n\leq\frac{1}{\epsilon}$

۵/

مثال/تمرین: برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ که $x<y$ عدد r وجود دارد که
$x<r<y$

حل: حالت $1<y-x$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$S:=\{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\mid j\le x\}\ ,\quad \sup S=l$$

در این صورت $k:=l+1<y$ پس $x<k<y$. اثبات حالت دیگر بعداً گفته می‌شود.

روش دوم: $0<y-x$ بنا بر اصل ارشمیدس عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{1}{m}<y-x$.

از طرفی عدد طبیعی k وجود دارد که $\frac{k}{m}>x$ (در غیر این صورت مجموعه اعداد طبیعی از بالا کراندار است)

فرض کنید n کوچکترین چنین k باشد. بنابراین

$$x<\frac{n}{m}\ ,\quad \frac{n-1}{m}\le x$$

از طرفی $\frac{n}{m}<y$. در این صورت $x<\frac{n}{m}<y$.

مثال: به ازای هر عدد حقیقی مثبت a، و هر عدد طبیعی n عدد یکتای مثبت b هست که $b^n=a$.

حل: اگر $0<b_1<b_2$ پس $b_1^n<b_2^n$. بنابراین b در صورت وجود یکتاست. برای وجود:

$$B:=\{x>0\mid x^n<a\}$$

$$x_0:=\frac{a}{1+a}\Rightarrow 0<x_0<1\Rightarrow x_0^n<x_0<a\Rightarrow B\neq\phi$$

اگر $1+a<x\Rightarrow a^n<(1+a)^n<x^n\Rightarrow x\notin B$ $\Rightarrow$ $1+a$ کران بالای B $\Rightarrow$ $\sup B:=b$ وجود دارد

$b^n=a$ ✓

$b^n>a\Rightarrow h:=\min\{1,\frac{a-b^n}{n(b+1)^{n-1}}\}\Rightarrow (b+h)^n-b^n\le hn(b+h)^{n-1}\le hn(b+1)^{n-1}<a-b^n$
$\Rightarrow b+h\in B$ ✗.

$b^n<a$ $\quad k:=\frac{b^n-a}{nb^{n-1}}\Rightarrow b^n-(b-k)^n=k(b^{n-1}+\cdots+(b-k)^{n-1})$
$\le knb^{n-1}=b^n-a\Rightarrow (b-k)^n>a$

$b-k$ کران بالای B. ✗

تمرین:

۱. اگر $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ آنگاه $\sup(-A) = -\inf A$

۲. اگر $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ آنگاه $\sup A \leq \sup B$ و $\inf B \leq \inf A$

۳. اگر X و Y دو مجموعه دلخواه و $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ دارای برد کراندار باشد قرار دهید

$$f_1(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y) \quad , \quad f_2(y) = \sup_{x \in X} f(x,y)$$

آنگاه الف)

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x,y) = \sup_{x \in X} f_1(x) = \sup_{y \in Y} f_2(y)$$

ب)

$$\sup_y \inf_x f(x,y) \leq \inf_x \sup_y f(x,y)$$

۴. اگر $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ آنگاه

الف)

$$\sup(a+A) = a + \sup A$$
$$\inf(a+A) = a + \inf A$$

۵. برای دو تابع

$$f, g: X \to \mathbb{R}$$

الف)

$$\inf f + \inf g \leq \inf f+g$$
$$\sup f + \sup g \geq \sup f+g$$

دنباله‌ها:

مجموعه‌ی A را متناهی است گوییم هرگاه تهی و یا معادل (یعنی در تناظر یک به یک) با قطعه‌ای از اعداد طبیعی چون $\{1,\dots,n\}$ باشد که $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد $A\simeq\{1,\dots,n\}$ (اگر تهی باشد $A\simeq\phi$).

مثال: ۱- اعداد طبیعی زوج $E\simeq\mathbb{N}$ زیرا

$$E\longrightarrow\mathbb{N},\qquad n\longmapsto\frac{n}{2}$$ تناظر است.

۲- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$ زیرا

$$(a,b)\longrightarrow(0,1),\quad n\longmapsto\frac{n-a}{b-a}\quad\Rightarrow\quad(a,b)\sim(0,1)$$

$$(0,1)\longrightarrow(0,\infty),\quad n\longmapsto\frac{n}{1-n}\quad\Rightarrow\quad(0,1)\sim(0,\infty)$$

$$(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R},\quad n\longmapsto\frac{1}{n}-n\quad\Rightarrow\quad(0,\infty)\simeq\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad\mathbb{R}\simeq(a,b).$$

مجموعه‌ای که متناهی و یا معادل با $\mathbb{N}$ باشد را شمارش‌پذیر نامیم و در غیر این صورت ناشمارا.
اگر $A\simeq\mathbb{N}$ آن را شمارای نامتناهی نامیم.

مثال: $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است
زیرا می‌توان تناظر را به این شکل بنویسیم

0	1	-1	2	-2	3	-3	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	…
1	2	3	4	5	6	7	

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{زوج } n\\ -\frac{n-1}{2} & \text{فرد } n\end{cases}$$

تمرین: هر زیرمجموعه از یک مجموعه شمارش‌پذیر خود شمارش‌پذیر است.

تمرین: اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارش‌پذیر مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

مثال. $\mathbb{Q}$ شمارا نامتناهی است.

کافیست $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{Q}^-$ شمارا باشند در این صورت چون $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ شمارا نامتناهی خواهد بود.

و کافیست $\mathbb{Q}^+$ شمارا باشد. برای این کار

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}
\end{array}$$

دنباله کانتور مورد نظر است.

مثال: $\mathbb{R}$ شمارا نیست. (کافیست نشان دهیم $(0,1)$ شمارا نیست).

کافیست (اولی) برهان خلف: اگر شمارا باشد چون نامتناهی است پس یک دنباله شمارا موجود است دنباله از نقاط همه

$b_1 = 0/a_{11}a_{12}\cdots$

$b_2 = 0/a_{21}a_{22}\cdots$

حال عدد $c = 0/c_1c_2c_3\cdots$ را در نظر بگیرید که $c_1 \neq a_{11}$، $c_2 \neq a_{22}$

در این صورت $c \in (0,1)$ ولی هیچ یک از b_nها نیست.

فصل ۲ فضای متری و خواص آن

تعریف: فرض کنید $X \neq \phi$ در این صورت تابع $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ را یک متر روی X نامیده می‌شود

i) $d(x,y)=0 \iff x=y$

ii) $d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$.

مثال:

$$d(f,g)=\int_0^1 |(f-g)(x)|dx$$

همه خواص بجز خاصیت (i) را دارا است که اگر f و g حداکثر در تعداد شمارایی نقطه متفاوت باشند

$d(f,g)=0 \not\Rightarrow f=g$ که به آن شبه متر گویند

مثال از مترها

1) $d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

2) $d(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$

3) $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ روی $X \neq \phi$ متر گسسته

4) اگر d یک متر روی X باشد آنگاه

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

یک متر است

تمرین: نامساوی مثلثی را از صعودی بودن $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ نتیجه بگیرید

تعریف: دو متر d_1 و d_2 را روی X معادل نامند هرگاه

$$\exists c_1, c_2 > 0;\quad c_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le c_2 d_1(x,y)\quad \forall x,y \in X.$$

مثال: در $\mathbb{R}^2$:

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

و

$$d_2(\ ;\ ) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

معادلند. در واقع

$$d_1 \le d_2 \le \sqrt{2}\, d_1$$

تعریف: در (X,d) گوی های زیر تعریف می‌گردند:

- گوی باز به مرکز x_0 و شعاع δ:

$$B_\delta(x_0)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<\delta\}$$

- گوی بسته ":

$$B_\delta[x_0]=\{x\in X\mid d(x,x_0)\le\delta\}$$

مثال: در فضای گسسته (یعنی X به همراه متریک گسسته) اگر $\delta<1$

$$B_\delta(x_0)=\{x_0\}$$

پس تک نقطه‌ای‌ها (تک عضوی‌ها) باز و در نتیجه هر زیرمجموعه X باز است

و بنابراین هر زیرمجموعه از X بسته است.

تعریف: $A\subseteq(X,d)$ باز است هرگاه

$$\forall x_0\in A,\ \exists \delta>0;\quad B_\delta(x_0)\subseteq A$$

به عبارت دیگر به چنین نقاطی از A نقاط درونی گفته می‌گردد.

۱۱/

تمرین: ۱) هر گوی در یک فضای متریک باز است.

۲) ϕ و X در X باز می‌باشند.

۳) اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، خود باز است.

۴) اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، خود باز می‌باشد.

نکته: اشتراک دلخواه از مجموعه‌های باز، لزوماً باز نیست. مثلاً در $\mathbb{R}$ داریم

اگر $G_n=(2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$ آنگاه $\bigcap G_n=\{2\}$ که باز نیست.

تعریف: دنباله (x_n) در (X,d) همگرا به x گوییم هرگاه

$$d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

یعنی

$$\forall \epsilon>0,\ \exists N>0;\quad \forall n\geq N \Rightarrow d(x_n,x)<\epsilon$$

۲) کوشی نامیده می‌شود هرگاه

$$d(x_n,x_m)\xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

یعنی

$$\forall \epsilon>0,\ \exists N>0;\quad \forall n,m\geq N \Rightarrow d(x_n,x_m)<\epsilon$$

۳) $A\subseteq X$ را کراندار می‌گوییم هرگاه در یک گوی قرار گیرد، یعنی

$$\exists x_0\in X,\ \exists \delta>0;\quad A\subseteq B_\delta(x_0)$$

۴) منظور از زیردنباله از (x_n) یعنی $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ که در آن (n_k) دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی است.

مثلاً

$$x_2, x_4, x_6, \dots$$

تمرین: در (X,d) اگر (x_n) دنباله‌ای باشد

۱) (x_n) همگرا است اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ای از x_n به x همگرا باشد

۲) اگر (x_n) همگرا باشد آنگاه (x_n) دنباله‌ای کشی است

۳) هر دنباله همگرا دنباله‌ای کراندار است

۴) اگر d متر گسسته باشد

$$x_n \to x \iff x_n = x \quad (\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0)$$

۵) اگر $A \subseteq X$ تحت متر d_1 باز باشد و d_1 با d_2 معادل شود در این صورت تحت متر d_2 نیز باز است. همچنین هر گوی تحت دو متر هر کدام از گوی دیگری را شامل می‌شود.

تعریف: $A \subset X$ را بسته نامند هرگاه A^c باز باشد.

مثال ۱: $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

مثال ۲: $B_\rho[x_0]$ در (X,d) همواره بسته است.

علت: کافی است نشان دهیم $B^c_\rho[x_0]$ باز است.

اگر $x_1 \in B^c_\rho[x_0] \Rightarrow d(x_1,x_0) > \rho$

با انتخاب $\delta \leq d(x_1,x_0) - \rho$ نشان می‌دهیم

$$B_\delta(x_1) \subseteq B^c_\rho[x_0]$$

کافی است x_1 درون و در نتیجه $B^c_\rho[x_0]$ باز خواهد بود.

$$\forall w \in B_\delta(x_1) \Rightarrow d(w,x_0) \geq -d(w,x_1) + d(x_1,x_0) > -\delta + d(x_1,x_0) \geq \rho - d(x_1,x_0) + d(x_1,x_0) = \rho.$$

مثال

۱. $a_n=\frac{1}{n}$ آنگاه $a_n\to 0$.

اصل ارشمیدس

$$\forall \epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N};\ \frac{1}{N}<\epsilon$$

$$\Rightarrow \forall n\geq N \Rightarrow |a_n-0|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\epsilon$$

۲. $a_n=2+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ آنگاه $a_n\to 2$.

$$|a_n-2|=\frac{1}{n}\left|\sin\frac{1}{n}\right|\leq\frac{1}{n} \Rightarrow a_n\to 2$$

۳. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ آنگاه $\lim a_n=0$.

$$|a_n-0|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ارشمیدس $\exists N,\ \frac{1}{N}<4\epsilon^2 \Rightarrow \forall n\geq N:\ \frac{1}{n}\leq 4\epsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\epsilon \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\epsilon \Rightarrow |a_n|\leq\epsilon$.

قضیه: ۱. اگر $a_n\to a$ و $b_n\to b$ در $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) آنگاه

$$a_n \pm b_n \to a\pm b$$

$\cdot$ و $\div$ ($\div$ در حالت $\mathbb{R}$ و در $b\neq 0$)

۲. حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

اثبات: (۱):

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|$$

قسمت اول نتیجه می‌دهد.

قسمت دوم از اینکه ~~...~~ $|a_n|$ کرانداری نتیجه می‌شود.

$$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|$$
$$\leq|a_n||b_n-b|+|a_n-a|\cdot|b|$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{|b_n|\cdot|b|}|a_nb-ab_n|\leq\frac{1}{|b_n|\cdot|b|}\cdot\left(|a_n-a||b|+|a||b_n-a|\right)$$

(۲) تمرین.

تمرین: اگر $c_n\to 0$ و (d_n) دنباله‌ای کراندار باشد، ثابت کنید $d_nc_n\to 0$.

قضیه (اصل ساندویچ): اگر $c_n \le a_n \le b_n$,

$$b_n , c_n \longrightarrow L \Rightarrow a_n \to L$$

اثبات:

$$0 \le a_n - c_n \le b_n - c_n = b_n - L + L - c_n \underset{n \ge N}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 \leftarrow a_n - c_n = a_n - L + \underbrace{L - c_n}_{\downarrow 0} \Rightarrow a_n \to L$$

مثال.

۱. $p > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

۲. $p > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

۳. $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

۴. $a, p > 0 \Rightarrow \frac{n^a}{(1+p)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

۵. $a \in \mathbb{R}, |x| < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ , \\ n^a x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$

حل:

(1): $\xrightarrow[\exists N > 0]{\text{ارشمیدس}} \frac{1}{N} < \epsilon^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[\forall n \ge N]{} \frac{1}{n} < \epsilon^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{1}{n^p} < \epsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^p} \to 0 .$$

(2): $1<p$, $\underset{\ge 0}{x_n} := \sqrt[n]{p} - 1 \Rightarrow x_n + 1 = \sqrt[n]{p} \Rightarrow p = (1 + x_n)^n \ge 1 + n x_n$

$$\Rightarrow 0 \le x_n \le \frac{p-1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow x_n \to 0$$

$p = 1$ بدیهی

$p < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{قبل}]{\text{با حالت}} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \to 1$ ✓

(3)

$$0 \le x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1 + x_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow 0 \le x_n^2 \le \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow x_n \to 0$$

۱۵/

$$(1+p)^n > \binom{n}{k}p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} > \frac{n^k}{2^k}\frac{p^k}{k!} \qquad :(۴)$$

$$0 < \frac{n^a}{(1+p)^n} < \frac{n^a}{\frac{n^k}{2^k}\frac{p^k}{k!}} = \frac{2^k k!}{p^k}\cdot n^{a-k} \longrightarrow 0$$

چون $a-k<0$.

(۵): از (۴) اگر $|x|=\frac{1}{1+p}$ بگیریم:

$$n^a|x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

و اگر $a=0$ که $|x|^n \to 0$ نتیجه می‌شود.

دنباله‌های یکنوا

(a_n) را صعودی گوییم:

$$a_n \le a_{n+1}$$

... نزولی

$$a_n \geq a_{n+1}$$

در حالت کلی اگر $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد، $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله از (a_n) نامند.

گزاره: اگر $a_n \to a$ آنگاه:

(۱) (a_n) کراندار

(۲) $a_{n_k} \to a$

(۳) $(a_n)_n$ کُشی است یعنی

$$\forall \epsilon>0, \exists N, \forall n,m \geq N: |a_n-a_m|<\epsilon$$

یعنی

$$a_n-a_m \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

اثبات: (۱)

$$\epsilon=1,\ \exists N>0,\ \forall n\geq N \quad |a_n|-|a| \le |a_n-a|<1$$

$$\Rightarrow |a_n| < 1+|a| \quad n\geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \max\{|a_1|,\dots,|a_{N-1}|,1+|a|\}$$

14/

(۳)

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \underset{n,m\ge N}{\le} |a_n - a| + |a_m - a| < 2\epsilon .$$

(٤)

$$|a_{n_k} - a| \xrightarrow{k\ge k_0 ;\ n_k \ge N} |a_{n_k}| \le \epsilon .$$

۵) تذکر: اگر $(a_n)_n$ صعودی باشد و n دارد (یعنی متمایل به بی‌نهایت برود)

اثبات: ثبت صعودی است.

(a_n) از بالا بی‌کران $\exists n_k \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty \xRightarrow[\forall M>0]{k\ge k_0} M < a_{n_k} \underset{\forall n \ge n_{k_0}}{\le} a_n \Rightarrow a_n \to +\infty$

$(a_n)_n$ از بالا کراندار $a = \sup_n a_n \Rightarrow \forall \epsilon > 0,\ a - \epsilon$

$$a - \epsilon < a_N \le a_n < a + \epsilon \qquad \exists N \quad \forall n \ge N$$

$$|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n \to a ,$$

نتیجه: هر دنباله نزولی و از پایین کراندار، همگراست. [دنباله همگرا است]

مثلاً: اگر $x = b/c_1c_2c_3\ldots$ بسط اعشاری یک عدد مثبت باشد، دنباله $x_n = b/c_1\ldots c_n$ صعودی است و همگرا است.

مثال: دنباله $a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ صعودی و از بالا کراندار، پس همگراست زیرا

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} \ge a_n .$$

$$0 < a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\ \text{تا}} = 1$$

مثال: $a_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$ نزولی و از پایین کراندار است زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

و $0 < a_n$

تمرین:

۱. $a_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$ همگراست.

۲. اگر ~~$0<a_n$ ، $a_n \to a$ آنگاه $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$~~

$(a_n)_n$ از اعداد مثبت و $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ آنگاه

$$\begin{cases} l<1 \Rightarrow \lim a_n = 0 \\ l>1 \Rightarrow \lim a_n = \infty \end{cases}$$

۳. $(\sin n)_n$ واگراست.

۴. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ صعودی و کراندار و در نتیجه همگراست.

۵. اگر دنباله $(a_n)_n$ ~~همگرا~~ و کراندار باشد آنگاه $t_n = \frac{s_1+\cdots+s_n}{n}$ نیز همگرا و کراندار است.

۶. اگر

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

آنگاه $(a_n)_n$ صعودی و از بالا کراندار است.

۷. اگر $0<a_1<1$ و $a_{n+1} = 1-\sqrt{1-a_n}$ آنگاه دنباله نزولی و کراندار است و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$$

۸. اگر $a_0=1$ و $a_n = \frac{3a_{n-1}+11}{9}$ آنگاه $a_n \to \frac{11}{6}$.

حد زبرین و حد زیرین

lim sup   lim inf

اگر $(a_n)_n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، قرار میدهیم

$$b_1 = \sup\{a_1, a_2, \dots\} \qquad c_1 = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$$

$$b_2 = \sup\{a_2, a_3, \dots\} \qquad c_2 = \inf\{a_2, a_3, \dots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \qquad c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

دنباله $(b_n)_n$ نزولی، دنباله (c_n) صعودی است، قرار میدهیم

$$\limsup (a_n) = \inf_n b_n \quad , \quad \liminf a_n = \sup_n c_n$$

مثال:

(۱) $a_n = (-1)^n$

$$\limsup a_n = 1 \ , \ \liminf a_n = -1$$

(۲) $a_n = (-1)^n n$

$$\limsup a_n = +\infty \ , \ \liminf a_n = -\infty$$

نکات:

(۱) $\limsup a_n = a \equiv \forall \epsilon > 0, \exists N > 0;\ \forall n \geq N,\ a_n < a + \epsilon$

(۲) ~~$\liminf a_n = a \equiv$~~ $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0,\ \forall n \geq N,\ a - \epsilon < a_n$

(۳) $\lim a_n = a \equiv (\liminf a_n = \limsup a_n = a)$

اثبات: (۳) از (۱) و (۲) نتیجه میشود و (۱) و (۲) هم مشابه‌اند. پس فقط (۱) را ثابت می‌کنیم

$$\limsup a_n = a \equiv (\inf b_n = a) \Rightarrow \underset{\text{کران پایین } (b_n) \text{ نیست}}{a + \epsilon} \Rightarrow \exists N;\ b_N < a + \epsilon$$

$$\Rightarrow a_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq N$$

برعکس

$\forall \epsilon>0 \ \exists N>0 : \quad a_n < a+\epsilon \quad \forall n \ge N$

$\Rightarrow$ برای n، $a+\epsilon$ یک کران بالا برای $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

و لذا $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$\Rightarrow b_n < a+\epsilon$

ε>0 دلخواه $\Rightarrow \limsup a_n < b_n < a+\epsilon$

$\Rightarrow \boxed{\limsup a_n \le a}$

از شرط دوم

$a-\epsilon < a_n$

$n \ge N$

$a-\epsilon \le b_m \quad n \ge N$

$a-\epsilon \le \limsup a_n$

$\boxed{a \le \limsup a_n} \rightarrow$ اثبات کامل

تمرین: برای دو دنباله $(b_n), (a_n)$

(۱) $\liminf a_n \le \limsup a_n$

(۲) $\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n+b_n)$

(۳) $\limsup a_n + \limsup b_n \ge \limsup(a_n+b_n)$

(۴) اگر A مجموعه حدود زیر دنباله‌ای (a_n) باشد آنگاه

$\limsup a_n = \sup A, \quad \liminf a_n = \inf A$

مثال: $a_n = n\sin^2(\frac{n\pi}{4})$

مثال: $a_n = n\sin^2\frac{n\pi}{4}$ را

زیرمجموعه A متشکل است از

$a_{4n+2} \to \infty \Rightarrow \infty \in A$

$\Rightarrow \limsup a_n = +\infty$

$a_{4n} \to 0 \Rightarrow \liminf a_n = 0$

در (X,d) اگر $A\subseteq X$

تعریف: $x_0\in X$ را نقطه‌ی حدی (یا انباشتگی) برای A گوییم هرگاه

$$\forall\epsilon>0,\quad \left(B_\epsilon(x_0)-\{x_0\}\right)\cap A\neq\emptyset$$

مجموعه نقاط حدی A را با A' نشان می‌دهیم.

تمرین: ۱) اگر x_0 نقطه حدی A باشد آنگاه در هر همسایگی x_0 بی‌شمار از نقاط A وجود دارد.

۲) اگر $A\subseteq X$ متناهی باشد $A'=\emptyset$

۳) اگر $A=\left\{\frac{k}{2^n}\ \middle|\ k=0,\dots,2^n-1,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ مطلوبست A'

۴) $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\ \middle|\ m,n\geq 1\right\}$ ، A'

۵) $x_0\in A' \iff \left(\exists x_n\in A\right.$ از نقاط متمایز و $\left.x_n\to x_0\right)$

قضیه: $A\subseteq X$

A بسته $\iff A'\subseteq A$

قضیه (بولزانو - وایرشتراس)

هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار از $\mathbb{R}^n$ نقطه حدی دارد.

اثبات: اگر $A\subseteq\mathbb{R}^n$ کراندار و نامتناهی باشد

$\exists$ جعبه $I=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]\ ;\ A\subseteq I$

اگر $\pi_1(A)$ مولفه اول از عناصر A باشد و ... $\pi_k(A)$

نامتناهی باشد (با حوضچه) کراندار است بنابر سوپریمم یا اینفیمم آن موجود است

که نقطه‌ی حدی خواهد بود. حال آن را با a_k نشان می‌دهیم

$$x=(x_1,\dots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

یک نقطه حدی برای A می‌شود که x_iها نقاط دلخواهی از فواصل بگیرند.

تمرین: در $\mathbb{R}^n$ هر دنباله کراندار یک زیر دنباله همگرا دارد.

(این دنباله یا برد متناهی دارد که یکی از اعضای آن نامتناهی بار تکرار شده و کافیست آن را زیر دنباله مورد نظر بگیریم و یا نامتناهی است که قضیه قبل نتیجه میدهد)

- اگر $A \subseteq X$ ، $x_0 \in X$ را نقطه مرزی A نامیده هرگاه

$$\forall \epsilon > 0, \quad \begin{cases} B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset \\ \text{و} \\ B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$$

مجموعه نقاط مرزی را با $bd(A)$ یا ∂A نشان میدهیم

مثال: اگر $A = \mathbb{Q}$ آنگاه $bd(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

تعریف: اگر $A \subseteq X$ ، قرار میدهیم $\bar{A} = A \cup A'$

در این صورت A بسته است اگر و تنها اگر $A = \bar{A}$.

تمرین: ۱) $\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq F,\ F \text{ بسته}} F$ و نشان دهید کوچکترین مجموعه بسته حاوی A میباشد

۲) $\overline{A} = A$

٢٤/

مثال

$a_n = (1+\frac{1}{n})\cos n\pi \Rightarrow A = \{1, -1\}$

$1 \swarrow \searrow -1$ فرد

$\Rightarrow \limsup a_n = 1, \ \liminf a_n = -1$

$a_n = 2n\cos n\pi - n^2$ مثال

$a_n \le 2n - n^2$

$\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$

~~تمرین: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ اگر f و g و ... پیوسته ... آنگاه f نیز پیوسته است.~~

فشردگی:

۱) برای $A \subseteq X$، خانواده $\{V_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ از زیرمجموعه‌های باز را پوشش باز A نامند هرگاه $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha$.

۲) A فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر پوشش باز حاوی زیرپوشش متناهی باشد

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$ و $A \subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$

مثال: هر زیرمجموعه متناهی از X فشرده است.

حل:

$A = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta;\ x_i \in V_{\alpha_i} \Rightarrow A \subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$

مثال: $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ فشرده نیستند

$\mathbb{N}, \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$

ولی زیرپوشش متناهی ندارند

قضیه (اشتراک کانتور): اگر X فشرده و (F_n) دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X باشند آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

(به برهان خلف و فشردگی X)

حل: اگر $\phi = F_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n = \bigcap_{1}^{\infty} F_n$ پس $F_1 \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n^c$ هر F_n^c باز است و چون F_1 فشرده است پس $\exists n$ ~ $F_1 \subseteq F_2^c \cup \dots \cup F_n^c$ یعنی $F_n = \bigcap_{1}^{n} F_i = \phi$ که تناقض است.

اثبات قضیه ۱ ص ۲۳ :

کری عضو یک نقطه را بار تکرار کنید و آن‌ها را زیر دنباله کنیم

اگر A فشرده و $(x_n)_n \subseteq A$. (همسایگی θ را نشان دهد دنباله نامتناهی از آن حول نقطه همگرا و اقعت که

نشان دهیم که زیر دنباله همگرا دارد. از آنجا که برای هر نقطه از A حد برای (x_n) نیست

شعاع r_z و $z \in A$ همسایگی $B_{r_z}(z)$ وجود دارد که حداکثر تعداد متناهی از اعضای دنباله

در آن می‌باشد

$$A \subseteq \bigcup_{z \in A} B_{r_z}(z)$$

از فشرده بودن

$$\exists z_1, \dots, z_n \in A;\quad A \subseteq B_{r_{z_1}}(z_1) \cup \dots \cup B_{r_{z_n}}(z_n)$$

ولی تنها تعداد متناهی از اعضای دنباله را شامل است. و Δ نامتناهی

برعکس: فرض کنید $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ که V_α ها باز هستند

خلف: A فشرده نباشد پس زیر پوشش متناهی ندارد

~~پس یک دنباله از V_α ها~~ V_{α_n} ها :

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \Rightarrow \exists x_1 \in A \setminus V_{\alpha_1}$$

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \Rightarrow \exists x_2 \in A \setminus V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}$$

$$\vdots$$

$$A \not\subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \Rightarrow \exists x_n \in A \setminus \bigcup^{n} V_{\alpha_k}$$

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ و از فرض فشردگی دنباله‌ای A دارای زیر دنباله

همگرا در A است.

$$\exists x_0 \in A,\quad \exists x_{n_k};\quad x_{n_k} \to x_0 \quad \text{و} \quad x_0 \in A$$

$$\exists k:\quad x \in V_k \Longrightarrow \exists N;\quad x_n \in V_k \quad n > k$$

با تناقض

در واقع ثابت کردیم از فشرده بودن هر پوشش باز زیر پوشش متناهی دارد.

پوشش متناهی ندارد.

- تعریف: گوییم $A \subseteq X$ فشرده دنباله‌ای (است) هرگاه هر دنباله در A دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد (در آن)

قضیه: $A \subseteq (X,d)$ فشرده است اگر و تنها اگر فشرده دنباله‌ای باشد.

از این به بعد با فضاهای متریک سر و کار داریم

قضیه (پایداری فشردگی)

اگر $X \xrightarrow{f} Y$ پیوسته و $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه $f(K)$ فشرده است.

اثبات: کافیست فشرده دنباله‌ای باشد پس برای یک دنباله دلخواه $f(x_n) \subseteq f(K)$

چون $(x_n) \subseteq K$ پس دارای زیر دنباله همگراست

$$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in K \xRightarrow{f \text{ پیوسته}} f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0).$$

گزاره: اگر $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه بسته و کراندار است.

اثبات: کرانداری: خلف اگر بی‌کران

$\nexists x_0$

$\exists (x_n) \subseteq K ;\quad d(x_n, x_0) \longrightarrow +\infty$

داخل گوی قرار نمی‌گیرد A

$\Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) \longrightarrow +\infty$

$\exists x_{n_k} ;\ x_{n_k} \longrightarrow z \in K \Rightarrow$ (اما هر همگرا کراندار است)

※

بسته بودن: کافیست $\overline{K} \subseteq K$.

خلف: $\exists x_0 \in \overline{K}$ و $x_0 \notin K \Rightarrow \exists x_n ;\ x_n \longrightarrow x_0$ (از نقاط K)

از فشردگی K، (x_n) زیر دنباله (x_{n_k}) دارد که همگرا به یک نقطه $z \in K$ است

یعنی $x_{n_k} \longrightarrow z$ اما باید $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ پس $x_0 = z \in K$

※

توابع هولدر و لیپشیتس

در اینجا کلاس‌هایی از توابع که در بین آنها اهمیت ویژه‌ای دارند خصوصاً در فرایندها ادامه ... با مشتقات خوش را معرفی می‌کنیم. فرض کنید ~~$Y=\mathbb{R}$ و $A=[a,b]$~~.

تعریف: تابع $f: X\to Y$ بین دو فضای متریک را لیپشیتس نامیده می‌شود هرگاه ثابت M مثبت چنان موجود باشد که

$$d(f(x),f(y))\le M\, d(x,y) \qquad \forall x,y\in X.$$

به کوچکترین چنین M ثابت لیپشیتس f گفته می‌شود.

(الف) تابع f را هولدر با توان $\alpha\in(0,1]$ گفته می‌شود هرگاه ثابت M چنان موجود باشد که

$$d(f(x),f(y))\le M(d(x,y))^{\alpha} \qquad \forall x,y\in A$$

تذکر: توابع هولدر با توان $\alpha=1$ همان توابع لیپشیتس است.

(ب) هر تابع هولدر پیوسته یکنواخت است زیرا کافیست $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ در نظر بگیریم.

(ج) توابع انقباضی دارای ثابت لیپشیتس $M<1$ می‌باشند و بالعکس.
(f انقباضی است هرگاه ثابت $0<M<1$ موجود باشد که $d(f(x),f(y))\le M d(x,y)\ \forall x,y$)

مثال: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $|f'(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$ آنگاه از قضیه مقدار میانگین برای هر $x,y\in[a,b]$

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|\le M|x-y|$$

(د) $f(x)=\sqrt{x}:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته لیپشیتس نیست ولی پیوسته هولدر از درجه $\frac{1}{2}$ است زیرا

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\le\sqrt{|x-y|}$$

از طرفی

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

که کراندار نیست.

۲۳/

قضیه: اگر $f: X \to X$ تابعی انقباضی باشد، ~~...~~ در آن X فضای متریک کامل است. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصر بفرد است.

(یعنی $\exists!\, x_0 \in X \;;\; f(x_0)=x_0$).

اثبات: $x_1 \in X$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

در این صورت

$n+1<m$

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_m) &\le d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m-1},x_m)\\
&= d(f(x_n),f(x_{n+1}))+\cdots+d(f(x_{m-2}),f(x_{m-1}))\\
&\le M\, d(x_n,x_{n+1})+\cdots+M\, d(x_{m-2},x_{m-1})\\
&\le M^2 d(x_{n-1},x_n)+\cdots+M^2 d(x_{m-3},x_{m-2})\\
&\;\;\vdots\\
&\le M^n d(x_1,x_2)+\cdots+M^{m-2} d(x_1,x_2)\\
&= d(x_1,x_2)\left(M^n+\cdots+M^{m-2}\right)
\end{aligned}$$

چون سری $\sum_{1}^{\infty} M^k$ همگرا است

بنابراین N را چنان می‌یابیم که $m,n \ge N$ ...

پس دنباله (x_n) کوشی است و چون فضا کامل است به نقطه x_0 همگرا است که نقطه ثابت است.

برای یکتایی اگر z نقطه ثابت دیگری باشد که $d(x_0,z) \neq 0$

$$d(x_0,z)=d(f(x_0),f(z)) \le M\, d(x_0,z)$$

که نتیجه می‌دهد $1 \le M$ و این تناقض است.

تمرین: برای $A,B\subseteq X$

(۱) $\overline{A\cap B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B}$

(۲) $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

(۳) A در X چگال نامیده می‌شود هرگاه $\bar{A}=X$. نشان دهید اگر $A\subseteq B\subseteq X$ و A در X چگال باشد B نیز چگال است.

(٤) اعداد اصم و اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگالند.

(۵) $A=\left\{\frac{k}{2^n} \,\middle|\, \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 2^n \end{array}\right\}$ در $[0,1]$ چگال است.

(۶) اجتماع هر تعداد از زیرمجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است.

(۷) اجتماع هر تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است و اشتراک هر تعداد از زیرمجموعه‌های بسته، بسته است.

پیوستگی

فرض کنید (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند، $f:X\to Y$ ، $x_0\in X$

تعریف: f را در x_0 پیوسته گوئیم هرگاه

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0:\ \begin{cases}\forall x\in X\\ d(x,x_0)<\delta\end{cases} \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\epsilon$$

تعبیر:

$$x\in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in B_\epsilon(f(x_0))$$

$$\equiv x\in f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right)$$

$$\equiv B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x_0))\right)$$

تعبیر: x_0 نقطه‌ای که تصویر نزدیکان آن نزدیک $f(x_0)$ شوند

مثال: $f:X\to\mathbb{R}$ ،

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 10 & x=2\end{cases}$$

که $X=[0,1]\cup\{2\}$

آنگاه f در ۲ پیوسته است زیرا

$$\forall \epsilon>0,\ \delta=\frac{1}{2}:\ \begin{cases}|x-2|<\frac{1}{2}\\ x\in X\end{cases} \Rightarrow |f(x)-f(2)|<\epsilon$$

فقط شامل $x=2$

۲۴

فرض کنید (X,d) فضای متری است،

$x_0 \in X$ ،

نشان دهید $f(x)=d(x,x_0)$ پیوسته است.

حل:

$$|f(y)-f(x)| = |d(y,x_0) - d(x,x_0)|$$

$$\leq d(y,x_0) - d(x_0,x) \leq d(y,x)$$

بنابراین $f(y) \to f(x)$ وقتی $y \to x$.

تعریف: فاصله نقطه x_0 از A ، $A \subseteq X$ ، $x_0 \in X$

$$d(x_0,A) = \inf_{y\in A} d(x_0,y)$$

تمرین ۱)

$$x_0 \in \bar{A} \iff d(x_0,A)=0$$

۲) نشان دهید که $g(x)=d(x,A)$ پیوسته است.

۳)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & x=\frac{m}{n},\ (m,n)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad f:[0,1]\to\mathbb{R}$$

ثابت کنید f در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است.

قضیه: تابع $(X,d)\xrightarrow{f}(Y,\rho)$ در x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$$

(اثبات: فرض کنید f پیوسته باشد)

آنگاه: f در x_0 پیوسته است

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

حال فرض کنید $x_n\to x_0$

$$\exists N>0:\ \forall n\geq N \Rightarrow d(x_n,x_0)<\delta$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$$

بعکس: برهان خلف: فرض کنید f در x_0 پیوسته نباشد

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x_\delta;\ d(x_\delta,x_0)<\delta \text{ و } \rho(f(x_\delta),f(x_0))\geq\varepsilon$$

با قرار دادن $\delta=\frac{1}{n}$ دنباله x_n بدست می‌آید که

$$x_n\to x_0 \ \&\ f(x_n)\not\to f(x_0)$$

تناقض

تعریف: $X\xrightarrow{f}Y$ را پیوسته گوییم هرگاه $\forall V\subseteq Y$ باز، $f^{-1}(V)$ باز باشد.

تمرین: اثبات کنید اگر X, Y, Z سه فضای متریک باشند و $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ پیوسته باشند آنگاه $g\circ f$ نیز پیوسته است.

۲۷

تمرین: ۱) اگر $f,g: X \to \mathbb{R}^n$ در x_0 برای فضای متریک X پیوسته باشند آنگاه،

$f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است. در حالتی که $n=1$ و $g(x_0)\neq 0$ آنگاه

$\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته می‌باشد.

۲) اگر $f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q} \\ 0 & x=0 \\ \frac{1}{n} & x=\frac{m}{n},\ (m,n)=1 \end{cases}$ آنگاه: f در تمام نقاط حقیقی حد دارد،

۳) نقاطی را معین کنید که در آن $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ پیوسته است.

۴) نقاطی را معین کنید که $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

پیوسته یکنواخت

تعریف: $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,\rho)$ را پیوسته یکنواخت گوییم هرگاه:

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0.\ d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho\left(f(x),f(y)\right)<\epsilon \qquad \forall x,y\in X$$

بنابراین: f پیوسته یکنواخت نیست $\iff \sim($ ~~رابطه~~ رابطه فوق $)$

$$\equiv \exists \epsilon>0.\ \forall \delta>0.\ \exists x_\delta,y_\delta ;\ d(x_\delta,y_\delta)<\delta,\ \rho(f(x_\delta),f(y_\delta))\ge\epsilon$$

مثلاً $\delta=\frac{1}{n}$ $\exists x_n,y_n ;\ d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}\ \&\ \rho(f(x_n),f(y_n))\ge\epsilon$

مثال: $f(x)=\frac{1}{x}$ روی $(0,\infty)$ پیوسته است و پیوسته یکنواخت نیست.

حل: $x_n=\frac{1}{n},\ y_n=\frac{2}{n} \Rightarrow |x_n-y_n|=\frac{1}{n}\to 0$

$$|f(x_n)-f(y_n)| = n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\ge\frac{1}{2}=\epsilon$$

تعریف: $X\xrightarrow{f}Y$ را لیپشیتس نامیم هرگاه

$$\exists M>0 ;\ \rho(f(x),f(y))\le M\, d(x,y) \qquad \forall x,y\in X$$

در صورتیکه $0<M<1$ آنگاه f را انقباضی نامیم.

تمرین: ۱) هر تابع لیپشیتس پیوسته یکنواخت است.

۲) اگر مشتق $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ کراندار باشد آنگاه f لیپشیتس است.

گزاره: تابع f پیوسته یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر دو دنباله (x_n) و (y_n) از E که $d(x_n,y_n)\to 0$ نتیجه دهد $d(f(x_n),f(y_n))\to 0$.

اثبات: اگر f پیوسته یکنواخت باشد و دو دنباله (x_n) و (y_n) با شرط $d(x_n,y_n)\to 0$ مفروض باشند آنگاه:

$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0;$ تعریف پیوستگی یکنواخت

$$\exists N>0;\quad n\geq N \Rightarrow d(x_n,y_n)<\delta$$
$$\Rightarrow d(f(x_n),f(y_n))<\epsilon$$
$$\Rightarrow d(f(x_n),f(y_n))\to 0$$

بالعکس: اگر شرط قضیه برقرار باشد و ~~[illegible]~~ و مطابق حالت در پیوسته یکنواخت نباشد مطابق تذکر قضیه قبل

$$\exists (x_n),(y_n);$$
$$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n},\quad d(f(x_n),f(y_n))\geq \epsilon$$
$$\Rightarrow d(x_n,y_n)\to 0 \quad , \quad '' \not\to 0$$
که تناقض است.

مثال: (۱) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2$ پیوسته یکنواخت است چرا که

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$ که $M:=2\max\{|a|,|b|\}$

(۲) $f(x)=x^2$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست چرا که

$x_n=n,\ y_n=n+\frac{1}{n}$

دارای شرط $d(x_n,y_n)=\frac{1}{n}\to 0$ ولی

$$|f(x_n)-f(y_n)| = \frac{1}{n^2}+2\not\to 0.$$

قضیه: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ پیوسته و X فشرده باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است

اثبات: خلف

$\exists (x_n,y_n)$; $d(x_n,y_n)\to 0$

$\exists \epsilon>0$ $\rho(f(x_n),f(y_n))\ge \epsilon$

از فشردگی همگرا میتوان فرض نمود (در حد زیردنباله)

$$x_n\to x_0$$

$$y_n\to y_0 \Rightarrow d(y_n,x_0)\le d(y_n,x_n)+d(x_n,x_0)\to 0 \Rightarrow y_n\to x_0$$

$$\epsilon\le \rho(f(x_n),f(y_n))\le \rho(f(x_n),f(x_0))+\rho(f(x_0),f(y_n))$$

$$\to 0 \quad \times$$

تمرین: ۱) اگر $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ آنگاه f پیوسته یکنواخت است

۲) از تمرین ۱ نتیجه بگیرید $\frac{\sin x}{x}$ در $(0,\infty)$ پیوسته یکنواخت است

قضیه: در $\mathbb{R}^n$، هر مجموعه بسته و کراندار، فشرده است (هاینه-برل)

اثبات: دنباله (x_n) در $K\subseteq\mathbb{R}^n$ درنظر.

(x_n) متناهی $\Rightarrow$ یک عضو نامتناهی بار تکرار $\Rightarrow$ زیردنباله همگرا دارد

(x_n) نامتناهی $\Rightarrow$ (از فرض کرانداری) $\xrightarrow{\text{بولتسانو-وایرشتراس}} \exists x_{n_k}\to x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_0\in\overline{K}$

$\Rightarrow$

$x_0\in K \xleftarrow{\text{بسته بودن } K}$

قضیه مقدار اکسترمم

۱) اگر $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ پیوسته و X فشرده آنگاه نقاط اکسترمم خود را اختیار می‌کند

$$\exists x_0, x_1 \in X; \quad f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$$

$$f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x)$$

اثبات: ابتدا $-\infty < \inf f, \sup f < +\infty$ سپس

$$\exists x_n \in X; \quad f(x_n) \longrightarrow \inf_{x \in X} f(x)$$

$$\exists y_n \in X; \quad f(y_n) \longrightarrow \sup_X f$$

X فشرده ⟸ هر دنباله‌ای زیردنباله همگرا دارد (برای راحتی نمایش با همان اندیس نشان می‌دهیم)

$$x_n \longrightarrow x_0 \xRightarrow{\text{پیوستگی}} f(x_n) \begin{cases} \longrightarrow f(x_0) \\ \longrightarrow \inf f \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = \inf f$$

$$y_n \longrightarrow x_1$$

$$f(y_n) \begin{cases} \longrightarrow f(x_1) \\ \longrightarrow \sup_X f \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = \sup_X f$$

همبند

تعریف: ۱) (U, V) را یک جداسازی X نامیم هرگاه

$$\begin{cases} U, V \neq \emptyset \\ U \cap V = \emptyset \\ U \cup V = X \end{cases}$$

۲) X را همبند نامیم هرگاه جداسازی نداشته باشد.

مثال: $\mathbb{Q}$ ناهمبند است

$$U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$$

تمرین: ۱) تنها زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$، فواصل می‌باشند.

حالت با اینکه از $x,y\in E$ و $x<z<y$ سوال (راهنمایی: $z\in E$ را انتخاب گرفت. به کمک آن قطع و $A=(-\infty,z)\cap E$ و $B=(z,+\infty)\cap E$

۲) هر زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ همبند است.

۳) اگر $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های همبند X به طوری که $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ همبند است.

۴) اگر $X \xrightarrow{f} Y$ پیوسته و $A\subseteq X$ همبند است، آنگاه $f(A)$ همبند است.

(قضیه پایداری همبندی)

۵) (قضیه مقدار میانی)

اگر X همبند و $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ پیوسته و $x,y\in X$ و k مقداری میان $f(x), f(y)$ باشد آنگاه

$$\exists z\in X;\quad f(z)=k$$

(کافیست توجه کنید $f(X)$ در $\mathbb{R}$ همبند است پس به صورت یک فاصله می‌باشد)

تمرین ← حل شود

دنباله توابع

به خانواده $f_n: X\to Y$ یک دنباله از توابع گویند.

انواع همگرایی در دنباله توابع

1) $f_n \xrightarrow{p.w} f$ (همگرایی نقطه‌وار) $\equiv \forall x,\ \forall\epsilon>0,\ \exists N(\epsilon,x)>0;\ \forall n\geq N \Rightarrow \rho(f_n(x),f(x))<\epsilon$

2) $f_n \xrightarrow{u} f$ (همگرایی یکنواخت) $\equiv \forall\epsilon>0,\ \exists N(\epsilon)>0;\ \forall n\geq N\quad \rho(f_n(x),f(x))<\epsilon \quad \forall x$

تمرین (۱): اگر A و B زیر مجموعه‌های از هم جدا، $\mathbb{R}^n$ باشند، و $a \in A$ و $b \in B$، و

$$p(t) = (1-t)a + tb \quad t \in \mathbb{R}$$

و $A_0 = p^{-1}(A)$ نیز $B_0 = p^{-1}(B)$ آنگاه A_0 و B_0 نیز از هم جدا‌اند، در $\mathbb{R}$ می‌باشند.

نشان دهید t_0 در $(0,1)$ وجود دارد که $p(t_0) \notin A \cup B$ و بنابراین نتیجه بگیرید هر زیر مجموعه محدب در $\mathbb{R}^n$ همبند است.

(۲): اگر A و B زیر مجموعه‌های فشرده از $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه $A \times B$ در $\mathbb{R}^2$ فشرده است.

(۳): اگر M یک فضای متریک کامل باشد و $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های بسته و ناتهی در M باشند به طوری که

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

و $\operatorname{diam} F_n \to 0$

ثابت کنید $\bigcap_{1}^{\infty} F_n$ دقیقاً یک عضو دارد.

(۴) ...

مشتق

تعریف: $f: J=(a,b)\to \mathbb{R}$ را در $x_0\in J$ مشتق‌پذیر نامیم هرگاه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود باشد که این مقدار را با $f'(x_0)$ مطابق قرارداد (۱) نشان می‌دهیم.

گزاره: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

اثبات: به سادگی با تغییر متغیر $x-x_0=h$ بدست می‌آید.

گزاره: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه در x_0 پیوسته است.

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

گزاره: اگر $f,g: J\to\mathbb{R}$، $x_0\in J$ که هر دو در x_0 مشتق‌پذیرند و نیز a عددی دلخواه باشد. در این صورت $af+g$ در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$(af+g)'(x_0)=af'(x_0)+g'(x_0)$$

اثبات: به سادگی از تعریف بدست می‌آید.

گزاره (قاعده زنجیره‌ای): اگر g در x_0 و f در $g(x_0)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه fog در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$(fog)'(x_0)=g'(x_0)f'(g(x_0))$$

$$\frac{fog(x_0+h)-fog(x_0)}{h}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\to g'(x_0)f'(g(x_0))$$

۳۴/

مثال: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در ۰ مشتق‌پذیر است و مشتق پیوسته است.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Multiple Solutions to a Caffarelli–Kohn–Nirenberg-Type Equation in Finsler Manifold

قضیه (فرما): اکسترمم نسبی، مشتق صفر

$f:X\to\mathbb{R}$ در $x_0\in X$ ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد اگر

$f(x)\le f(x_0)$ ، ($f(x_0)\le f(x)$ مینیمم)

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در $x_0\in(a,b)$ مشتق‌پذیر و ماکزیمم (نسبی) باشد آنگاه $f'(x_0)=0$.

اثبات: $\delta>0$ ، $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

$f'(x_0)=0$

قضیه مقدار میانگین کوشی: اگر $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر، آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که

$$(f(b)-f(a))g'(c)=[g(b)-g(a)]\cdot f'(c)$$

$$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)\Rightarrow h(a)=h(b)$$

رول $\Rightarrow h'(x_0)=0$

قضیه رول $\Rightarrow \dots \Rightarrow 0=h'(x_0)$

۲۵

قضیه مقدار میانگین: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و $(a,b)\to$ مشتق‌پذیر، آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

لم: $g(x)=x$ بگیرید.

نتایج: ۱) $f'\geq 0 \Rightarrow f$ صعودی

۲) $f'\leq 0 \Rightarrow$ نزولی

$$x_1<x_2 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0) \quad \exists x_0$$

وقتی f مشتق‌پذیر است لزوماً پیوسته نیست $f'(x)$ خاصیت ... دارد

قضیه داربو: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$، (a,b) مشتق‌پذیر و $f'(a)<\lambda<f'(b)$ آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد $\lambda=f'(x_0)$

اثبات: $g(x)=f(x)-\lambda x$

آنگاه $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته، $(a,b)\to$ مشتق‌پذیر

$$\begin{cases} g'(a)<0 \\ g'(b)>0 \end{cases}$$ از طرفی

مینیمم در $x_0\in[a,b]$ دارد $\Rightarrow g'(x_0)=0$

$x_0\neq a,b$

$\Rightarrow x_0\in(a,b)$

گزاره: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ و مشتق f تا مرتبه n روی (a,b) موجود است.

اگر

$$P(x):=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که

$$f(b)=P(b)+\frac{f^{(n)}(x_0)\,(b-a)^n}{n!} \quad (*)$$

تذکر: در حالت $n=1$ همان قضیه مقدار میانگین است و برای n های بالاتر $f^{(n)}(x_0)$ مقدار خطا

خطا می‌توان با فرمول بالا را تقریب زد

$$f(b)\simeq P(a)$$

با توجه به خطا

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)(b-a)^n}{n!}\right|\le M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

(M کران $f^{(n)}(x)$) است.

اثبات:

$$g(x):=f(x)-P(x)-M(x-a)^n$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-n!M$$

از طرفی

$$g^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)\qquad k=0,\dots,n-1$$

$$g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n-1)}(a)=0$$

اگر $g(b)=0$

$$\exists x_1\in(a,b),\quad \left\{\begin{array}{l} g(x_1)=0\\ g'(a)=0\end{array}\right. \Rightarrow \exists x_2;\ g'(x_2)=0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_n;\ g^{(n)}(x_n)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(n)}(x_n)=n!M$$

M معلوم و

کافیست

اگر حد خطا به سمت صفر میل کند آنگاه $n\to\infty$ $g(x)$

$$f(b)=\sum\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n\qquad \forall b.$$

۴۳

پس

$$f_n \xrightarrow{u} f \equiv \sup_{x\in X} \rho(f_n(x), f(x)) \to 0$$

از تعریف روشن است که $f_n \xrightarrow{u} f$ نتیجه می‌دهد $f_n \xrightarrow{p.w} f$ ولی عکس آن برقرار نیست. قبل از آن مفاهیم مثالی را می‌آوریم.

$$f_n \not\xrightarrow{u} f \equiv \exists \epsilon>0;\ \forall N(\epsilon),\ \exists n\ge N(\epsilon);\ \overbrace{\exists x_n\in X}\ \rho(f_n(x_n), f(x_n)) \ge \epsilon$$

مثال: $f_n(x) = \frac{x}{n}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f_n \xrightarrow[\text{واقعی}]{p.w} 0=f \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{l} x_n = n \\ |f_n(x_n)-f(x_n)| = 1 \ge \frac{1}{2} = \epsilon \end{array}\right] \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

مثال:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x\in(0,\frac{1}{n}) \\ 0 & x\in[\frac{1}{n},+\infty) \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{p.w} 0=f, \quad \left[x_n=\frac{1}{2n}, \quad |f_n(x)-f(x)| = |n-0| = n \ge 1 \right]$$

همگرایی یکنواخت نیست

اگر X یک فضای متری دلخواه باشد، تعریف می‌کنیم

$$B(X,\mathbb{R}) = \{ f: X\to\mathbb{R} \mid f \text{ تابعی کراندار است} \}$$

و نرم روی آن را بدین شرح تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

تمرین: $B(X,\mathbb{R})$ با جمع و ضرب توابع و اسکالر و چنین نرمی یک فضای نرم دار است.

[illegible]

$$f_n \to f$$
$$\equiv \|f_n - f\|_\infty \to 0$$
$$= \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$
$$= f_n \xrightarrow{u} f$$

مثال:

$f_n(x)=x^n$ روی $[0,1]$.

$$f_n \xrightarrow{p.w} \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x\in[0,1) \end{cases} \quad , \quad \left[\begin{array}{l} x_n = \cancel{\ } 1-\frac{1}{n} \qquad n\geq 2 \\ \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x)| = (1-\frac{1}{n})^n - 0 \to e^{-1} \geq \frac{1}{2}e^{-1} = \epsilon \end{array}\right]$$

n بزرگ

همگرا یکنواخت نیست

(X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

مثال: ۱) اگر X فشرده باشد کامل است.

$$(x_n)\subseteq X \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_0 \in X$$
$$\xRightarrow{\text{تمرین}} x_n$$

۲) $\mathbb{R}^n$ کامل است.

زیرا هر دنباله کشی کراندار و طبق بولتزانو وایرشتراس زیردنباله همگرا دارد و مطابق تمرین در حالت ۱) مثال قبل خود دنباله همگرا می‌گردد.

قضیه: $B(X,\mathbb{R}^n)$ کامل است.

اثبات: اگر $(f_n)\subseteq B(X,\mathbb{R}^n)$ کشی باشد

$$\forall x\in X \ ; \quad 0\leq \|f_n(x)-f_m(x)\| \leq \|f_n-f_m\|_\infty \to 0$$

پس $(f_m(x))_m$ در $\mathbb{R}^n$ کشی است از ۲) مثال قبل

$$f_n(x) \longrightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{یکتا}} \in \mathbb{R}^n$$

از منحصر بودن حد f یک تابع می‌گردد

$\forall x: \quad \|f(x)\|_\infty = \|f(x) - f_N(x) + f_N(x)\|_\infty$ $\quad$ $6)$ $f_n \xrightarrow{p.w} f$ و

$\leq \cancel{\|f\|} \; \epsilon + \underbrace{\|f_N\|_\infty}_{\text{کران‌دار}} \Rightarrow f \in B(X, \mathbb{R}^n)$

$\forall x: \quad \|f_n(x) - f(x)\|_\infty \overset{\text{وجود } N(\epsilon, x)}{\leq} \|f_n(x) - f_m(x)\|_\infty + \|f_m(x) - f(x)\|_\infty$

$\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$

$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$m > N, m$

لذا به ازای هر n ... $\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

قضیه دینی

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$ پیوسته

X فشرده

(f_n) نزولی

$f_n \xrightarrow{p.w} f$; f پیوسته

$\Bigg) \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

اثبات: $g_n = f_n - f$: تعریف می‌کنیم باید نشان دهیم

$g_n \xrightarrow{u} 0$ و از فرض

$\left\{ \begin{array}{l} g_n \text{ پیوسته} \\ g_n \xrightarrow{p.w} 0 \\ g_{n+1} \leq g_n \quad \forall n \end{array} \right.$ نزولی (f_n) نتیجه

$\epsilon > 0$; $\quad G_n = \{x \mid g_n(x) < \epsilon\} = g_n^{-1}(-\infty, \epsilon)$ باز ✓

$\Rightarrow X = \bigcup G_n \xrightarrow[\text{نزولی بودن}]{\text{فشردگی}} X = G_1 \cup \dots \cup G_m$

$\Rightarrow \forall x \in X \rightarrow g_1(x) < \epsilon$ یا ... یا $g_m(x) < \epsilon$ $\xrightarrow[k \geq m]{\text{نزولی بودن}}$ $g_k(x) < \epsilon \Rightarrow g_n \xrightarrow{u} 0$

$\forall x$

~~تمرین:~~ $\cancel{f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n}$

تمرین: ۱) $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$ بر $[0,1]$ همگرای یکنواخت است.

(از قضیه دینی استفاده کنید)

۲) بدون شرط فشردگی، دیگر قضیه درست نباشد مثالی ارائه دهید.

قضیه:

$X \xrightarrow[\text{پیوسته}]{f_n} \mathbb{R}^p$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ آنگاه f پیوسته.

اثبات: فرض کنید $\epsilon>0$ و $x_0\in X$ (فضای متریک). از همگرای یکنواخت

$\exists N=N(\epsilon)>0$; $\|f_n-f\|_\infty<\epsilon$, $n\geq N$

$\Rightarrow$ $\cancel{\|f_n(x)-f_n(x_0)\|\leq\|f_n}$

$$\|f(x)-f(x_0)\| \leq \|f(x)-f_n(x)\| + \|f_n(x)-f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0)-f(x_0)\|$$

$$< \|f-f_n\|_\infty + \underbrace{\epsilon}_{f_n \text{ پیوستگی}} + \|f_n-f\|_\infty$$

$$< 3\epsilon$$

پس f در x_0 پیوسته.

قضیه: $C_b(X,\mathbb{R}^p)$ کامل است (توابع پیوسته از X به $\mathbb{R}^p$)

اثبات: هر دنباله کوشی در $B(X,\mathbb{R}^p)$ همگرا است (مانند / کامل است) در ... همگرا، پس $f_n \xrightarrow{u} f$ که $f\in B(X,\mathbb{R}^p)$، قضیه قبل $f\in C(X,\mathbb{R}^p)$.

۴۷/

انتگرال ریمان ①

۱- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ کراندار، و P افرازی از $[a,b]$

$P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$, $\begin{cases} M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \\ m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \end{cases}$ $\Rightarrow$ $U(P,f)=\sum M_i\Delta x_i$, $L(P,f)=\sum m_i\Delta x_i$

$L(P,f)\le U(P,f)$ بدیهی

تذکر: اگر P' ظریف‌تر از P باشد یعنی $P\subseteq P'$ آنگاه

$$L(P,f)\le L(P',f)\le U(P',f)\le U(P,f)$$

تعریف:

$$\overline{\int_a^b} f=\inf_P U(P,f) ,\quad \underline{\int_a^b} f=\sup_P L(P,f)$$

در حالتی که $\underline{\int}=\overline{\int}$ آنگاه f را انتگرال‌پذیر گوییم و $\int f$ ①

قضیه: f انتگرال‌پذیر است $\iff \forall\epsilon>0,\ \exists P_\epsilon:\ U(P_\epsilon,f)-L(P_\epsilon,f)<\epsilon$

اثبات: $\Leftarrow$

$$L(P_\epsilon,f)\le\underline{\int}f\le\overline{\int}f\le U(P_\epsilon,f)$$

$\Rightarrow 0\le\overline{\int}f-\underline{\int}f\le\epsilon$ عدد ثابت

که چون ϵ دلخواه است

$(\Rightarrow)$ از $\exists\epsilon$

$\int f+\frac{\epsilon}{2}=\overline{\int}f+\frac{\epsilon}{2}\overset{\exists P_1}{>}U(P_1,f)$

$\int f-\frac{\epsilon}{2}=\underline{\int}f-\frac{\epsilon}{2}<L(P_2,f)$ $\Rightarrow P_\epsilon=P_1\cup P_2$

$$\int f-\frac{\epsilon}{2}<L(P_2,f)\le L(P^*,f)\le U(P^*,f)\le U(P_1,f)<\int f+\frac{\epsilon}{2}$$

قضیه: اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ بر $[a,b]$ و f_n ها انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه f نیز انتگرال‌پذیر است، و

$$\int f_n \longrightarrow \int f$$

اثبات:

$$f_n \xrightarrow{u} f \equiv \forall \epsilon,\ \exists N(\epsilon)>0;\ \forall n \geq N \Rightarrow \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

برای $\forall P$

$$U(P, f_n - f) < \epsilon(b-a)$$

$$L(\quad\quad) \geq -\epsilon(b-a)$$

$$U(P,f) - L(P,f) = U(P, f - f_n + f_n) - L(P, f - f_n + f_n)$$

$$\leq U(P, f - f_n) - L(P, f - f_n)$$

$$+\ U(P, f_n) - L(P, f_n)$$

$$< a\epsilon$$

$$L(P, f_n - f) \leq \int f_n - \int f = \int f_n - f \leq U(P, f_n - f)$$

$$\Rightarrow -\epsilon(b-a) \leq \int f_n - \int f \leq \epsilon(b-a) \qquad \forall n \geq N$$

~~[illegible]~~ پس f انتگرال‌پذیر است و $\int f_n \to \int f$.

گزاره: اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال‌پذیر است.

علت: f بر فشرده $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است پس

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\quad x,y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

افراز دلخواه P را در نظر بگیرید که $\|P\| < \delta$، این واقعیت که

$$M_i - m_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f = \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)|$$

دارد نتیجه می‌دهد

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum (M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon(b-a).$$

تمرین: (۱) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر (ریمان) است.

(۲) اگر f انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $|f|$ انتگرال‌پذیر است و

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

(۳) اگر $m \le f(x) \le M \quad \forall x\in[a,b]$ آنگاه $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$

(۴) اگر f در $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_0^1 f = \lim \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

(۵) به طور کلی اگر f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

(۶) تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n} \quad n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

(۷) اگر f, g در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر (ریمان) باشند و عدد c ثابت، آنگاه $cf+g$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b cf+g = c\int_a^b f + \int_a^b g$$

(۸) اگر .... و $f \le g$ آنگاه

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

(۹) در حالتی که f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر (ریمان) و $a<c<b$ آنگاه f روی هر دو بازه $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر (ریمان) است،

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(۱۰) $\int_a^a f = 0$.

۱۱) اگر $\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ ([illegible]) $\int_{-\infty}^{c} f = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f$) تعریف کرد

نیز $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^{+\infty} f$ و این نوع انتگرال را ناسره نامیده می‌شود

آنگاه قضایای (۷)، (۸) و (۹) برای آن‌ها نیز برقرار است.

۱۲) اگر f در c از $[a,b]$ ناپیوسته باشد $\int_a^b f$ نیز ناسره نامیده می‌شود و چنین تعریف می‌شود

$$\int_a^b f := \lim_{d\to c^-}\int_a^d f + \lim_{k\to c^+}\int_k^b f$$

در صورت وجود حد قضایای (۷)، (۸) و (۹) نیز برای آن‌ها برقرار است.

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال: اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(c)$$

اثبات: از پیوستگی f روی $[a,b]$

$$\exists u,v\in[a,b], \quad f(u)=\min_{[a,b]} f, \quad f(v)=\max_{[a,b]} f$$

$$f(u)(b-a) \le \int_a^b f \le f(v)(b-a)$$

$$f(u) \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le f(v)$$

حال از قضیه [illegible]

$$\exists c, \quad f(c)=\frac{\int_a^b f}{b-a}$$

تعمیم (قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرال): اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر، و g نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

قضیه: اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ بر $[a,b]$ که هر f_n انتگرال‌پذیر ریمان است

در این صورت f انتگرال‌پذیر ریمان می‌گردد و $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

علت:

$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ به ازای $\forall P$

$\forall n \geq N, \ \forall x$

$U(P, f_n-f) < \epsilon(b-a)$

$L(\ \ " \ \ ) \geq -\epsilon(b-a)$

$$U(P,f)-L(P,f) = U(P, f-f_n+f_n) - L(P, f-f_n+f_n)$$

$$\leq U(P, f-f_n) - L(P, f_n-f) + U(P,f_n) - L(P,f_n)$$

$$< \epsilon \longrightarrow$$

کراندار

قضیه همگرایی تسلطی لبگ

$f_n \xrightarrow{p.w.} f$ به انتگرال‌پذیر ریمان، f انتگرال‌پذیر ریمان و $|f_n(x)| \leq M$ $\forall n$ $\forall x\in[a,b]$ آنگاه $\int f_n \longrightarrow \int f$

قضیه جابجایی حد و مشتق:

(f_n) از توابع مشتق‌پذیر بر $[a,b]$، $x_0\in[a,b]$، $f_n(x_0) \xrightarrow[n]{} \cancel{f(x_0)}$ همگرا، $f'_n \xrightarrow{u} g$

آنگاه $\exists f$ که $f_n \xrightarrow{u} f$ و $f'=g$.

اثبات:

$$|(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(x_0)| \overset{\exists c}{=} |(f_m-f_n)'(c)|\,|x-x_0| \leq \|f'_m-f'_n\|_\infty \cdot |x-x_0| \longrightarrow 0$$

$$\geq |(f_m-f_n)(x)| - |(f_m-f_n)(x_0)|$$

تمرین ۳

f_n برای یک x_0 همگرا

مشتق‌پذیر (f'_n) ; $f'_n \xrightarrow{u} g$

$\therefore \exists f : f_n \xrightarrow{u} f$

$, \quad f' = g$

---

(۱) (f_n) کوشی است زیرا:

$$|f_m(x)-f_n(x)| = |(f_m-f_n)(x) - (f_m-f_n)(x_0) + (f_m-f_n)(x_0)|$$

$$\underset{\exists y}{=} |\underbrace{(f'_m-f'_n)(y)}_{\le \|f'_m-f'_n\|} \cdot (x-x_0) + (f_m-f_n)(x_0)|$$

$$\underset{\epsilon>0,\ \exists N}{<} \epsilon(b-a)+\epsilon = \alpha\epsilon$$

(۲) (f_n) کوشی تحت $\|\ \|_\infty$ است و در نتیجه همگرایی یکنواخت به تابعی مثل f.

f_n ها پیوسته اند پس (۱) مشتق‌پذیر

f پیوسته

حال (۱) مشتق f را در نقطه دلخواه c.

$$|(f_m-f_n)(x) - (f_m-f_n)(c)| = |(x-c).(f'_m-f'_n)(z_1)|$$

$$\left| \frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} \right| \le \|f'_n-f'_m\|_\infty \underset{\epsilon>0}{\overset{\text{کوشی}}{<}} \epsilon$$

$$\underset{m\to\infty}{\Rightarrow} \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} \right| \le \epsilon$$

مشتق‌پذیر و $f'=g$

$f'_n \xrightarrow{u} g \Rightarrow \exists N_1 ;\ \|f'_n(c)-g(c)\| < \epsilon$

$\exists \delta ;\ |x-c|<\delta \Rightarrow |\text{کسر}_n - f'_n(c)| < \epsilon$

$\Leftrightarrow |\text{کسر}_f - g|$

$= |\text{کسر}_f - \text{کسر}_n + \text{کسر}_n - f'_n(c)|$

$$|(f_m - f_n)(x)| \le \|g_n - g_m\|_\infty \cdot |x - x_0| + |(f_m - f_n)(x_0)|$$

$$< \epsilon (b-a) + \epsilon = \epsilon$$

پس (f_n) تحت $\|\ \|_\infty$ کوشی است که قبلاً فضای مربوطه کامل بود. پس همگراست.

برای مشتق پذیری

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - c} - g(c) \right| = \lim \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \to 0$$

هم پیوستگی:

اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع از (X, d) به (Y, ρ) باشد، $\mathcal{F}$ را هم پیوسته در x_0 نامند هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \underset{\delta(x_0, \epsilon)}{\delta} > 0,\quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

و هم پیوسته یکنواخت گوییم اگر $\delta = \delta(\epsilon)$.

قضیه: اگر X فشرده و $\mathcal{F}$ هم پیوسته باشد، هم پیوسته یکنواخت است.

لم: فرض کنید E شمارا و (f_n) دنباله‌ی توابع حقیقی مقدار، کراندار نقطه‌ای روی E، آنگاه زیر دنباله‌ای همگرا روی E دارد.

$$f_1(x_1),\ f_2(x_1),\ \text{———}$$

$$f_1^1(x_2),\ f_2^1(x_2),\ \text{———}$$

$$f_1^2(x_2),\ f_2^2(x_2)\ \text{———}$$

~~۴۹~~ / ۴۸

سری توابع

اگر (f_n) حقیقی مقدار (یا $\mathbb{R}^p$ مقدار)

$$S_n(x) = \sum_1^n f_k(x)$$

$\lim S_n = \sum_1^\infty f_n$ را سری گوییم.

اگر $S_n \xrightarrow{p.w} \sum f_k$ → سری را همگرای نقطه‌ای

→ $S_n \xrightarrow{u}$ 〃 〃 همگرای یکنواخت

مثال: $\sum x^n = \frac{x}{1-x}$ روی $(-1,1)$

در هر بازه بسته همگرای یکنواخت

$x^n = \sum_1^n - \sum_1^{n-1} \xrightarrow{u} 0$ ×

قضیه: $f_n: X \to \mathbb{R}^p$ پیوسته و $\sum f_n = f$ همگرای یکنواخت آنگاه f پیوسته

اثبات:

$S_n \xrightarrow{u} f \overset{\text{از قبل}}{\Longrightarrow} f$ پیوسته (S_n پیوسته)

قضیه: $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $\sum f_n'$ همگرای یکنواخت و $\sum f_n(x_0)$ همگرا آنگاه $\sum f_n$ همگرای یکنواخت و $(\sum f_n)' = \sum f_n'$

حل:

$S_n' \xrightarrow{u} \sum f_n'$ از قبل $\Longleftarrow$

$S_n(x_0) \to \sum f_n(x_0)$

قضیه: (کوشی)

$\sum f_n$ همگرای یکنواخت $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N.$ $\|\sum_{n+1}^m f_k\| < \epsilon$

49

تعمیم آزمون M - وایرشتراس

$|f_n(x)| \le M_n$,

$\sum M_n$ همگرا

$\therefore \sum f_n$ همگرای یکنواخت

(آزمون یکنواخت)

مثال $\sum \frac{1}{n^2} \sin(e^n x)$

آزمون دیریکله :

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^q$ جمع جزئی ب همگرای یکنواخت کراندار

$X \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$

φ_n دنباله نزولی و همگرای یکنواخت به 0

$\therefore \sum \varphi_n f_n$ همگرای یکنواخت

آزمون آبل :

$X \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^q$

$X \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$

$\sum f_n$ همگرای یکنواخت

φ_n یکنوا

(φ_n) به طور یکنواخت کراندار

$\therefore \sum \varphi_n f_n$ همگرای یکنواخت

مثال‌هایی از این آزمون‌ها بیاورید

۵۰/

اثبات آزمون دیریکله!

$$\sum_{n}^{m}\varphi_k f_k = \sum_{n}^{m}\varphi_k (S_k - S_{k-1})$$

$$= \varphi_n (S_n - S_{n-1}) + \cdots + \varphi_m (S_m - S_{m-1})$$

$$= \varphi_m S_m + S_{m-1}(\varphi_{m-1} - \varphi_m) + \cdots + S_n(\varphi_n - \varphi_{n+1}) - \varphi_n S_{n-1}$$

$$= \varphi_m S_m - \varphi_n S_{n-1} + \sum_{n}^{m-1} S_j (\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{n}^{m}\varphi_k f_k\right\| \le |\varphi_m S_m| + |\varphi_n S_{n-1}| + \sum_{n}^{m-1} |S_j|\cdot|\varphi_j - \varphi_{j+1}|$$

کراندار به M — از نزولی بودن

$$\le \epsilon M + \epsilon M + M\cdot \underbrace{\sum_{n}^{m-1} \varphi_j - \varphi_{j+1}}_{\text{تلسکوپی}} = \varphi_n - \varphi_m$$

$\exists N\colon |\varphi_n(x)| < \epsilon \quad \forall m,n \ge N$

$$< 4\epsilon M$$

کوشی ← سری همگرا است

اثبات آبل:

$$\sum_{n}^{m}\varphi_k f_k \overset{\text{مانند قبل}}{=} S_m\varphi_m - \varphi_n S_{n-1} + \sum_{n}^{m-1} S_j(\varphi_j - \varphi_{j+1})$$

$S_j - S + S$

$$\left|\sum_{n}^{m-1} S_j(\varphi_j - \varphi_{j+1})\right| = \left|\sum_{n}^{m-1}\underbrace{(S_j - S)}_{\le \epsilon}(\varphi_j - \varphi_{j+1}) + \sum_{n}^{m-1} S(\varphi_j - \varphi_{j+1})\right|$$

$$\le \epsilon(\varphi_n - \varphi_m) + M(\varphi_n - \varphi_m)$$

$$\le \epsilon\cdot a$$

$$\left\|\sum_{n}^{m}\varphi_k f_k\right\| = \left\|\sum_{n}^{m}\varphi_k(S_k - S_{k-1})\right\| = \left\|\varphi_n S_n - \varphi_n S_{n-1} + \varphi_{n+1}S_{n+1} - \varphi_{n+1}S_n + \cdots + (\varphi_{m-1}S_{m-1} - \varphi_{m-1}S_{m-2}) + (\varphi_m S_m - \varphi_m S_{m-1})\right\|$$

$$= \left\|S_n(\varphi_n - \varphi_{n+1}) + S_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi_{n+2}) + \cdots + S_{m-1}(\varphi_{m-1} - \varphi_m)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{n}^{m-1}\underbrace{S_k}_{\le\epsilon}\underbrace{(\varphi_k - \varphi_{k+1})}_{\le M} + \varphi_m S_m - \varphi_n S_{n-1}\right\| \le \epsilon + \|\varphi_m\|_M \|S_m\| + M\|\varphi_n\|\cdot\|S_{n-1}\|$$

$\le$ ~~$\epsilon + M($~~

همگرایی کراندار:

f_n بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر

$|f_n(x)| \le M \quad \forall x, \forall n$

$f_n \xrightarrow{p.w} f$

$\Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

همگرایی یکنوا:

f_n یکنوا و انتگرال‌پذیر

$f_n \xrightarrow{p.w} f$

$\Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

مثلا صعودی

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f(x)$$

پس

$$|f_n(x)| \le B = \|f_1\| + \|f\|$$

پس همگرایی کراندار ✓

مثال $0<a$

$$\frac{\sin nx}{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad x\in[a,\pi]$$

$$\left|\frac{\sin nx}{nx}\right| \le \frac{1}{na} \ \xRightarrow{\text{همگرایی کراندار}}\ \lim \int_a^{\pi} \frac{\sin nx}{nx} = 0.$$

۵۲

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ سری مشروب

مثال

آزمون ۱) $a_n \searrow 0$ $\Leftarrow$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است $\Leftarrow$ همگرا

مثال

$$\sum \frac{\cos nx}{n}, \quad 2\sin\frac{x}{2}\sum_{1}^{n} \cos kx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\left(2\cos kx \sin\frac{x}{2} = \sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \left| \quad \right| \le \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

که از دیریکله سری همگرا است

مثال: $\sum \frac{\sin nx}{n}$ نیز برای $x \neq 2k\pi$ همگرا است.

مثال $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ از M-وایرشتراس $M_n = \frac{1}{n^2}$ همگرای مطلق است.

مثال

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است و e^{-nx} نزولی کراندار $\xrightarrow{\text{آبل}}$ همگرا

سری توانی دارای شعاع همگرایی است. و مشتق و انتگرال سری توانی همگرا است و سری همگرا است

خواص انتگرال از توابع پله‌ای

1. $$\int_a^b \left[c_1 s(x) + t(x)\right] dx = c_1 \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx$$

2. اگر $s(x) < t(x)$ آنگاه $\forall x \in [a,b]$
$$\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx$$

3. اگر $a < c < b$
$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx$$

4. (پایایی تحت انتقال)
$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx$$

5. $k > 0$.
$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)\,dx$$

نکته در تعریف انتگرال؛

اگر f تابعی کراندار روی $[a,b]$ باشد

$$S := \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \;\middle|\; s \le f \right\}, \quad T := \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \;\middle|\; f \le t \right\}$$

$\forall\ t_0, s_0$ پله‌ای، $s_0 \le f \le t_0 \leadsto \int_a^b s_0 \le \sup S \le \inf T \le \int_a^b t_0$

f انتگرال‌پذیر است: $\underbrace{\sup S}_{=\underline{I}(f)} = \underbrace{\inf T}_{=\overline{I}(f)}$ و انتگرال f هم $\overline{I} = \underline{I}$

مثال

$$\int s_0 \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \int t_0$$

۵۶

الف) مثال‌هایی که انتظار داریم

نتیجه

(۱ $f_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbb{R} \xrightarrow{p.w} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

ناپیوسته

(۲ $f_n(x) = nx(1-x^2)^n \quad [0,1] \xrightarrow{p.w} 0$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{2(n+1)} \not\longrightarrow \int 0 = 0$$

تمرین: فرض کنید $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ ، $f(x) = \lim f_n(x)$ نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0)$$

تمرین: نشان دهید $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ به ازای هر x حقیقی همگراست و اگر آن را $f(x)$ بنامیم نشان دهید آنگاه

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

انتگرال ریمان

منظور از افراز بازه $[a,b]$ افراز نقاط $x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$

است. فاصله نقاط میانی به طور قرار داد $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ،

$P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ افراز مربوطه است.

افرازی مانند P' را ظریف‌تر از P نامیم هرگاه $P\subseteq P'$.

- به سادگی برای دو افراز P_1 و P_2 افراز $P_1\cup P_2$ ظریف مشترک است یعنی از هر دو ظریف‌تر است.

- متناسب با افراز P، تابع f تابع پله‌ای است هرگاه

$$f(x)=\begin{cases} a_1 & x\in[x_0,x_1) \\ a_2 & \text{"} \ [x_1,x_2) \\ \vdots & \\ a_n & \text{"} \ [x_{n-1},x_n] \\ \cancel{a_{n+1}} & \cancel{x=x_n} \end{cases}$$

و نمایش آن

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\,\chi_{[x_{k-1},x_k]}.$$

مثال: تابع $f(x)=[x]$ تابع پله‌ای است.

برای هر تابع پله‌ای انتگرال را به صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{1}^{n} a_k\,\Delta x_k$$

تعریف می‌کنیم

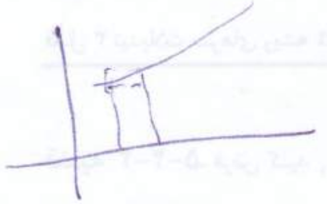
مثال: اگر f ثابت باشد $\int_a^b f = c(b-a)$

تمرین: جمع و ضرب دو تابع پله‌ای خود توابع پله‌ای اند

قضیه: اگر f بر $[a,b]$ یکنوا باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر است

ص ——— پیوسته ———

اثبات: مثلاً صعودی.



تعریف می‌کنیم

$$P=\{x_0, \dots, x_n\}$$

با فواصل مساوی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$t_n(x) = f(x_k), \quad s_n(x) = f(x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k)$$

$$\Rightarrow \quad s_n \le f \le t_n$$

$$\int t_n - \int s_n = \sum_{1}^{n} f(x_k)\Delta x_i - \sum_{1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{1}^{n}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right) \longrightarrow 0$$

$$\int s_n \le \int f \le \int t_n \Rightarrow \quad \& \quad \int t_n - \int s_n = \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \int_a^b s_n \le \overline{I}(f) \le \int_a^b t_n$$

$$\int_a^b s_n \le \underline{I}(f) \le \int_a^b t_n$$

$$\rightarrow 0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \int t_n - \int s_n = \varepsilon_n \Longrightarrow$$ مقصود حاصل است