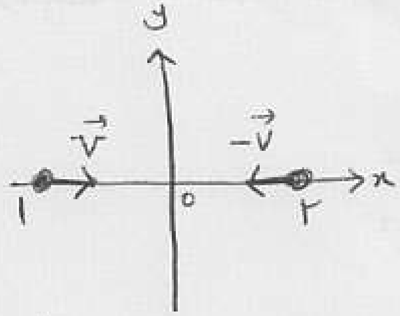
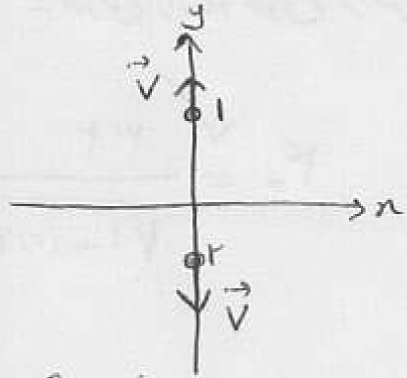
دینامیک نسبیتی

برای ورود به مبحث دینامیک نسبیتی ، ابتدا مثالی از یک برخورد را بررسی می‌کنیم:

چارچوب S



قبل از برخورد (i)



بعد از برخورد (f)

$m_1 = m_2 = m_0$ (جسم ۱ و جسم ۲ هر دو دارای جرم یکسان m هستند.)

از دید چارچوب S :

$u_{1xi} = V$ سرعت جسم ۱ در راستای محور x قبل از برخورد

$u_{2xi} = -V$ سرعت جسم ۲ در راستای محور x قبل از برخورد

$u_{1yi} = 0$ سرعت جسم ۱ در راستای محور y قبل از برخورد

$u_{2yi} = 0$ سرعت جسم ۲ در راستای محور y قبل از برخورد.

$u_{1xf} = 0$ سرعت جسم ۱ در راستای محور x بعد از برخورد

$u_{2xf} = 0$ سرعت جسم ۲ در راستای محور x بعد از برخورد

$u_{1yf} = V$

$u_{2yf} = -V$

تکانه قبل از برخورد در راستای محور x

$$(P_x)_i = m_1 u_{1xi} + m_2 u_{2xi} = m_0 V + m_0(-V) = 0$$

$$(P_y)_i = m_1 u_{1yi} + m_2 u_{2yi} = 0 + 0 = 0$$

$$(P_x)_f = m_1 u_{1xf} + m_2 u_{2xf} = 0 + 0 = 0$$

$$(P_y)_f = m_1 u_{1yf} + m_2 u_{2yf} = m_0 V + m_0(-V) = 0$$

$(P_x)_i = (P_x)_f$ و $(P_y)_i = (P_y)_f \Longrightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$ در چارچوب S پایستگی تکانه خطی

حال همین مثال برخورد را از دید چارچوب S' بررسی می‌کنیم

فرض کنید چارچوب S' با سرعت $-V\hat{i}$ نسبت به چارچوب S در حرکت باشد

$$S': \quad u'_{1xi} = \frac{u_{1xi} - \vec{V}}{1 - \frac{u_{1xi}V}{c^2}} = \frac{V-(-V)}{1+\frac{V^2}{c^2}} = \frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

$$u'_{2xi} = \frac{u_{2xi} - V}{1 - \frac{u_{2xi}V}{c^2}} \overset{V\to -V}{=\!=} \frac{-V-(-V)}{1-\frac{V^2}{c^2}} = 0$$

$$u'_{1yi} = 0$$

$$u'_{2yi} = 0$$

$$u'_{1xf} = \frac{u_{1xf} - V}{1 - \frac{u_{1xf}V}{c^2}} \overset{V\to -V}{=\!=} \frac{V}{1+0} = V$$

$$u'_{2xf} = \frac{u_{2xf} - V}{1 - \frac{u_{2xf}V}{c^2}} \overset{V\to -V}{=\!=} \frac{V}{1-0} = V$$

$$u'_{1yf} = \frac{u_{1yf}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - \frac{u_{1xf}V}{c^2}} = \frac{V\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-0} = V\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$$u'_{2yf} = \frac{u_{2yf}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_{2xf}V}{c^2}} = \frac{-V\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-0} = -V\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} P'_{xi} &= m_1 u'_{1xi} + m_2 u'_{2xi} = \frac{2m_0 V}{1+\frac{V^2}{c^2}} \\ P'_{xf} &= m_1 u'_{1xf} + m_2 u'_{2xf} = m_0 V + m_0 V = 2m_0 V \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (P'_x)_i = (P'_x)_f$$

دیده می‌شود که قانون پایستگی تکانه خطی در امتداد محور x در چارچوب S'

نقض شده است.

اما

ما علاقه مندیم که تمام قوانین فیزیک در همه چارچوب های لخت

یکسان باشد.

بر اساس اصل موضوع انیشتین، قانون پایستگی تکانه خطی در

همه چارچوب های لخت باید برقرار بماند.

بنابراین وقت آن رسیده است که به فکر راه حل و چاره ای باشیم

تا پایستگی تکانه خطی را در همه چارچوب های لخت حفظ کنیم.

راه حل: بازتعریف تکانه خطی

می‌توان تحقیق کرد که با بازتعریف تکانه خطی به صورت

$$P = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

پایستگی تکانه خطی در چارچوب S و به طور همزمان در چارچوب S' حفظ می‌شود.

$$\vec{P} = mu = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{cases} P_x = \dfrac{m_0 u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ P_y = \dfrac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ P_z = \dfrac{m_0 u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم آیا در مثال برخورد گفته شده، با بازتعریف تکانه خطی می‌توانیم پایستگی تکانه خطی را برقرار کنیم؟

دو جرم $m_1 = m_2 = m_0$ را در برخورد گفته شده به خاطر داریم.

می‌خواهیم پایستگی تکانه خطی را بار دیگر در چارچوب S' بررسی نماییم البته با این شرط که تعریف جدید $P = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ را به کار بریم.

چارچوب S'

$$P'_{xi} = P'_{1xi} + P'_{2xi} =$$

$$= \frac{m_0\, u'_{1xi}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{1i}}{c^2}}} + \frac{m_0\, u'_{2xi}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{2i}}{c^2}}}$$

$$= m_0\, \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}+0^2}{c^2}}} + 0$$

$$= \frac{2m_0 v}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$P'_{xf} = P'_{1xf} + P'_{2xf} = \frac{m_0\, u'_{1xf}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{1f}}{c^2}}} + \frac{m_0\, u'_{2xf}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{2f}}{c^2}}}$$

$$= \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2+v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2}}} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2+v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2}}} =$$

$$= \frac{2m_0 v}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Longrightarrow (P'_x)_i = (P'_x)_f$$

قبلاً پایستگی تکانه خطی در راستای محور x در S' برآورده نمی‌شد.

اما حالا می‌بینیم که با به کارگیری تعریف $\vec{P} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2 \ldots}}$ ، پایستگی تکانه خطی در S برآورده می‌شود

$$P = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

در اینجا معمول است که m_0 را جرم سکون و $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ را

جرم نسبیتی بنامند.

اگر سرعت جسمی برابر با صفر باشد، $u=0$، آنگاه جرم سکون و جرم نسبیتی

آن با هم برابر است. $u_{\text{جسم}} = 0 \rightarrow m = m_0$

فرض کنید،

جرم A در چارچوب S_1 در حال سکون است. ناظر ساکن در چارچوب

S_1 جرم سکون را به ذره نسبت می‌دهد. از دید S_1، جرم ذره A برابر m_0 است.

حال اگر چارچوب S_2 نسبت به S_1 در حال حرکت با سرعت ثابت u

باشد، سرعت جرم A نسبت به S_2 برابر با u می‌شود.

ناظر ساکن در S_2 جرم $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ را به جرم A نسبت می‌دهد.