مشتق جزئی

مشتق تابع با یک متغیر مستقل

در این بخش، به بررسی مشتق در توابع با یک متغیر مستقل پرداخته می‌شود. این روش همان روشی است که در گذشته و در دروس ریاضیات مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال f را به عنوان تابعی از متغیر دلخواه x در نظر بگیرید که به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(x) = x^2$$

برای به‌دست آوردن مشتق تابع فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x$$

مشتق جزئی تابع با چند متغیر مستقل

همانطور که اشاره شد، محاسبه مشتق توابع با چند متغیر مستقل، کاربرد بسیار زیادی در محاسبات مهندسی و مسائل بهینه سازی دارد. بنابراین محاسبه مشتق در تابع با یک متغیر مستقل را با روشی که در ادامه توضیح داده می‌شود، تعمیم می‌دهیم. در ادامه، هدف ما محاسبه مشتق تابعی از دو متغیر x و y است که این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

برای محاسبه مشتق جزئی این تابع نسبت به x، ابتدا y را مانند یک عدد ثابت در نظر می‌گیریم و در مشتق‌گیری، مشابه با یک عدد با آن رفتار می‌کنیم. بنابراین مشتق جزئی این تابع نسبت به x، به شکل زیر است:

$$f'_x = 2x + 0 = 2x$$

در این مثال مشتق x^2 برابر با ۲x است و از آنجایی که y را به عنوان یک ثابت در نظر گرفته‌ایم، y^3 نیز ثابت خواهد بود و مشتق آن برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. ذکر این نکته حائز اهمیت است که مشتق جزئی نسبت به x را می‌توان با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ نیز نشان داد.

برای محاسبه مشتق تابع نشان داده شده نسبت به y، این بار x را به صورت یک ثابت در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$f'_y = 0 + 3y^2 = 3y^2$$

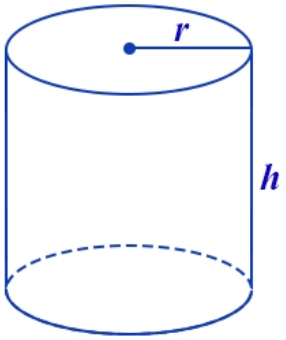
در محاسبه مشتق نسبت به y، مشتق ترم اول تابع که به صورت عدد ثابت فرض شده، صفر است و تنها مشتق ترم دوم آن اهمیت دارد. مشتق جزئی تابع f نسبت به y، با نماد $\frac{\partial f}{\partial y}$ نیز نشان داده می‌شود.

مثال‌ها

شاید برای شما نیز این سوال مطرح شده باشد که در چه مواردی متغیر یک تابع، ثابت در نظر گرفته می‌شود و به طور کلی مشتق جزئی در چه مسائلی کاربرد دارد. بنابراین در ادامه و در قالب مثال‌هایی، کاربرد مشتق جزئی نشان داده می‌شود. به یاد داشته باشید که مهمترین قدم در مسائل مشتق جزئی، تشخیص متغیری است که باید ثابت در نظر گرفته شود.

مثال ۱

استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع r را در نظر بگیرید. تغییرات حجم استوانه را در دو حالت محاسبه کنید. در حالت اول، تنها شعاع استوانه اجازه تغییر دارد و در حالت دوم، فقط ارتفاع استوانه تغییر می‌کند.



حجم این استوانه با استفاده از رابطه $v = \pi r^2 h$ تعریف می‌شود و می‌توان این رابطه را به فرم تابعی از دو متغیر r و h نوشت:

$$f(r,h) = \pi r^2 h$$

در صورتی که تنها شعاع استوانه تغییر کند، برای محاسبه تغییرات حجم، h را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین مشتق تابع دو متغیره حجم استوانه، به صورت زیر خواهد بود:

$$f'_r = \pi (2r) h = 2\pi rh$$

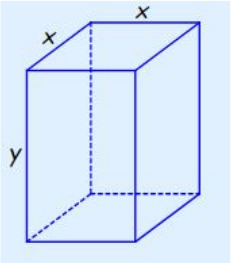
دقت کنید که در این حالت، پاسخ به صورت حاصل ضرب محیط سطح مقطع استوانه $(2\pi r)$ در ارتفاع استوانه (h)، درآمده است. در این حالت، انگار یک پوسته با شعاع r و ارتفاع h به استوانه اضافه شده است. در حالت دوم تنها ارتفاع استوانه اجازه تغییر دارد، بنابراین برای محاسبه تغییرات حجم، r را ثابت و h را متغیر در نظر می‌گیریم.

$$f'_h = \pi r^2 (1) = \pi r^2$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در این حالت تغییرات حجم به صورت πr^2 است. انگار دیسک نازکی با مساحت πr^2 به استوانه اضافه شده است.

مثال ۲

مکعب مستطیلی را در نظر بگیرید که سطح مقطع آن، مربعی با طول ضلع x و ارتفاع آن، y است. تغییرات مساحت سطح جانبی این مکعب مستطیل را در دو حالت محاسبه کنید. در حالت اول تنها طول ضلع سطح مقطع مکعب مستطیل (x) تغییر می‌کند و در حالت دوم تنها ارتفاع آن (y) اجازه تغییر دارد.



مساحت سطح جانبی مکعب مستطیل شکل بالا، شامل دو سطح بالا و پایین با مساحت x^2 و چهار سطح جانبی با مساحت xy است. بنابراین تابع مساحت سطح جانبی برابر است با:

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy$$

برای محاسبه تغییرات مساحت سطح جانبی، در حالتی که تنها طول ضلع سطح مقطع مکعب مستطیل (x) تغییر کند، مشتق جزئی تابع نسبت به x را محاسبه می‌کنیم و در حالتی دوم که تنها ارتفاع (y) تغییر می‌کند، مشتق جزئی تابع نسبت به y پاسخ مسئله است. بنابراین داریم:

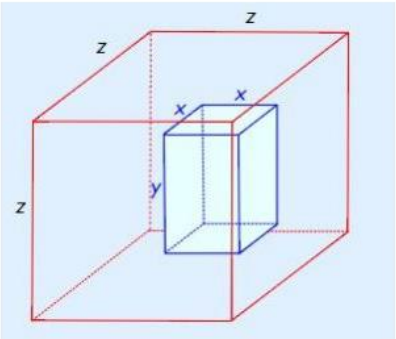
$$f'_x = 4x + 4y$$

$$f'_y = 0 + 4x = 4x$$

در ادامه به بررسی مشتق جزئی در توابعی با بیش از دو متغیر مستقل می‌پردازیم.

مثال ۳

مطابق شکل زیر، یک مکعب به طول ضلع z را در نظر بگیرید که مکعب مستطیلی با سطح مقطع مربعی با طول ضلع x و ارتفاع y از درون آن بریده شده است. مشتق جزئی تابع حجم باقی مانده را نسبت به x، y و z به‌دست آورید.



حجم باقی مانده و مشتق جزئی نسبت به x، y و z به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$f(x,y,z) = z^3 - x^2y$$

$$f'_x = 0 - 2xy = -2xy$$

$$f'_y = 0 - x^2 = -x^2$$

$$f'_z = 3z^2 - 0 = 3z^2$$

زمانی که x و y های زیادی در تابع وجود داشته باشند، محاسبه مشتق جزئی، اندکی مشکل می‌شود. در این حالت، پیشنهاد ما این است که متغیر ثابت مسئله را با حروفی مانند "c" و "k" که ثابت بودن آن‌ها برای ما ملموس‌تر است، عوض کنیم. این نکته در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۴

تابع $f(x,y) = y^3 sin(x) + x^2 tan(y)$ را در نظر بگیرید، برای محاسبه مشتق جزئی این تابع نسبت به x، می‌توان حرف y را با حرف k عوض کرد:

$$f(x,y) = k^3\sin(x) + x^2\tan(k)$$

$$f'_x = k^3\cos(x) + 2x\tan(k)$$

حواستان باشد که در انتهای حل، پارامتر k را با مقدار اولیه آن یعنی y عوض کنید.

$$f'_x = y^3\cos(x) + 2x\tan(y)$$

مشابه روندی که در بالا توضیح داده شد، مشتق جزئی تابع، نسبت به y را می‌توان با تعویض "x" با حرف "c"، محاسبه کرد. بنابراین داریم:

$$f(x,y) = y^3\sin(k) + k^2\tan(y)$$

$$f'_y = 3y^2\sin(k) + k^2\sec^2(y)$$

$$f'_y = 3y^2\sin(x) + x^2\sec^2(y)$$

فرمول مشتق مراتب بالاتر

تابعی چند متغیره همچون f(x,y) را در نظر بگیرید. این تابع نسبت به دو متغیر x و y تغییر می‌کند. از این رو می‌توان تغییرات تابع را نسبت به هریک از این متغیرها محاسبه کرد. توجه داشته باشید که تابع دو متغیره بوده و ۴ حالت می‌تواند برای مشتق مرتبه دوم وجود داشته باشد. در ادامه روابط مربوط به این ۴ حالت نشان داده شده است.

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

تمامی این مشتقات از مرتبه ۲ هستند. شاید نکته جالب در روابط فوق تفاوتِ فرمولِ دو مشتق $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ و $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ است. همان‌طور که احتمالا شما نیز متوجه شده‌اید، مشتق در ابتدا نسبت به اندیس چپ و سپس نسبت به اندیس سمت راست گرفته می‌شود. در ادامه مثال‌هایی ارائه شده، که مطالعه آن‌ها را توصیه می‌کنیم.

مثال ۱

تمامی مشتقات مرتبه دوم تابع $f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2$ را بیابید.

در ابتدا بایستی مشتقات نسبت به x و y به طور جداگانه محاسبه شود. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2\sin(2x) - 2xe^{5y} \\ f_y(x,y) &= -5x^2e^{5y} + 6y \end{aligned}$$

حال از دو عبارت بدست آمده در بالا، نسبت به x و y مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -4\cos(2x) - 2e^{5y} \\ f_{xy} &= -10xe^{5y} \\ f_{yx} &= -10xe^{5y} \\ f_{yy} &= -25x^2e^{5y} + 6 \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید در روابط بالا از (x,y) استفاده نشده است. البته می‌توان از این نماد استفاده کرد، اما در شکل استاندارد معمولا این نماد به کار گرفته نمی‌شود. شاید این سوال برایتان مطرح شده باشد، که در چه زمانی می‌توان مشتقات f_{xy} و f_{yx} را برابر در نظر گرفت؛ از این رو در ادامه قضیه‌ای مطرح شده که این موضوع در آن مطرح شده است.

قضیه: فرض کنید تابع f در ناحیه D تعریف شده باشد. اگر مشتقات f_{xy} و f_{yx} در نقطه مذکور پیوسته باشند، در این صورت رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

مثال ۲

قضیه بیان شده در بالا را برای تابع $f(x,y) = xe^{-x^2y^2}$ نشان دهید.

در ابتدا مشتق مرتبه اول تابع را به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{-x^2y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2y^2} \\ f_y(x,y) &= -2yx^3e^{-x^2y^2} \end{aligned}$$

حال می‌توان مشتقات f_{xy} و f_{yx} را مطابق با روابط زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= -2yx^2e^{-x^2y^2} - 4x^2ye^{-x^2y^2} + 4x^4y^3e^{-x^2y^2} = -6x^2ye^{-x^2y^2} + 4x^4y^3e^{-x^2y^2} \\ f_{yx}(x,y) &= -6yx^2e^{-x^2y^2} + 4y^3x^4e^{-x^2y^2} \end{aligned}$$

تاکنون تنها مشتقات مرتبه دوم را مورد بررسی قرار دادیم. توجه داشته باشید که می‌توان مشتقات جزئی را نیز تا مراتب بالاتر محاسبه کرد. در ادامه دو نمونه از مشتقات مرتبه سوم نشان داده شده است.

$$f_{xyx} = (f_{xy})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$
$$f_{yxx} = (f_{yx})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

توجه داشته باشید که قضیه بیان شده در بالا برای نقاطی که در آن‌ها مشتق پیوسته است، در مراتب بالاتر نیز برقرار خواهد بود. برای نمونه در این نقاط، سه مشتق جزئی زیر با هم برابر هستند.

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

در حالت کلی قضیه فوق برای هر تابعی با هر تعداد متغیری برقرار خواهد بود. تنها نکته مهم برابر بودن تعداد هر متغیر در دو سمت رابطه است. برای نمونه دو مشتق زیر با هم برابر هستند و دلیل آن برابر بودن تعداد s,r,t در دو طرف رابطه است.

$$f_{ssrtsrr} = f_{trsrssr}$$

مثال ۳

مشتقات زیر را بیابید.

a. f_{xxyzz} برای تابع $f(x,y,z) = z^3y^2\ln(x)$

b. $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ برای تابع $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$

a: توجه داشته باشید که مشتق‌گیری از چپ به راست انجام می‌شود. بنابراین داریم:

$$f_x = \frac{z^3y^2}{x}$$
$$f_{xx} = -\frac{z^3y^2}{x^2}$$
$$f_{xxy} = -\frac{2z^3y}{x^2}$$
$$f_{xxyz} = -\frac{6z^2y}{x^2}$$
$$f_{xxyzz} = -\frac{12zy}{x^2}$$

b: در این حالت نیز در ابتدا دو بار نسبت به x و در مرحله بعد نسبت y مشتق‌گیری می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\mathrm{e}^{xy}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 2y\mathrm{e}^{xy} + xy^2\mathrm{e}^{xy}$$