۱. تحقیق کنید که رابطه‌ی بخش‌پذیری در اعداد صحیح دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف ۵.۱.۳ است؟

۲. تحقیق کنید که رابطه‌های زیر در اعداد حقیقی دارای کدام ویژگی مذکور در تعریف ۵.۱.۳ است؟

(الف) $xRy \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$.

(ب) $xR'y \Leftrightarrow x+y\in\mathbb{Z}$.

۱.۲.۳ تعریف

رابطه‌ی R در مجموعه‌ی P، یعنی $R\subseteq P\times P$، را **رابطه‌ی ترتیبی جزئی** (که ما آن را به اختصار، **رابطه‌ی ترتیبی**) می‌گوییم اگر **انعکاسی**، **پاد تقارنی**، و **متعدی** باشد.

۲.۲.۳ بحث در کلاس

حال درک خود را از تعریف بالا **تقویت کنید.**

۱- توجه می‌کنیم که رابطه‌ی **کوچکتری** معمولی اعداد، یعنی $<$ ، ترتیبی نیست! **کدام** ویژگی از سه ویژگی انعکاسی، پاد تقارنی، و متعدی را ندارد؟ **چطور** استدلال می‌کنید که پاد تقارنی است؟ (نکته‌ای فنی (از اصول منطق) در آن است! از استاد درس کمک بگیرید).

۴.۲.۳ تعریف

فرض کنیم $\leq$ رابطه‌ای ترتیبی دلخواه روی P است و $x, y \in P$. اگر دست‌کم یکی از دو حالت $x \leq y$ یا $y \leq x$ رخ دهد، می‌گوییم که x و y (نسبت به $\leq$) **قابل مقایسه‌انــد**، اگر هیچ یک از این دو حـالت رخ ندهد، گاهی می‌نویسیم $x \| y$.

برای مثال، اگر رابطه‌ی **بخشپذیری** را در $\mathbb{N}$ در نظر بگیـریم، آنگـاه ۲ و ۶ و همچنـین ۱۲ و ۴ قابل مقایسه‌اند (**چرا؟**) در حالی که . . . و . . . قابل مقایسه نیسـتند! همچنـین توجـه می‌کنیم که اگر رابطه‌ی **ترتیبی معمولی** $\leq$ را روی $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم، آنگـاه هـر دو عـدد طبیعی دلخواه m و n قابل مقایسه هستند!

۵.۲.۳ تعریف

اگر $\leq$ رابطه‌ای ترتیبی در P باشد، گاهی می‌گوییم که P به رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ **مجهز** شده است، یا جفت $(P, \leq)$ **مجموعه‌ای مرتب** است.
در این صورت P را **مجموعه‌ی زمینه‌ی** آن می‌نامیم. اگر $\leq$ **خطی** نیز باشد، می‌گوییم که $(P, \leq)$ **زنجیر** است.

برای مثال $(\mathbb{N}, \leq)$زنجیر است در حالی که مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{N}, |)$ چنین نیست (در اینجا از نماد متداول بخشپذیری، یعنی $|$، به جای $\leq$ استفاده کرده‌ایم تا اشتباه برانگیز نباشد.)
بدیهی است که یک مجموعه چون P ممکن است تحت رابطه‌های ترتیبی **متعددی** **مجموعه‌ای مرتب** باشد (این طور نیست؟) اگر امکان اشتباه نباشد، برای مثال در بحثی صرفاً یک رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ روی P مد نظر باشد، به جای اینکه بگوییم **جفت** $(P, \leq)$

مجموعه‌ای مرتب است، رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ را به طور صریح ذکر نمی‌کنیم و صرفاً می‌گوییم که **P مجموعه‌ای مرتب است!**

۶.۲.۳ بحث در کلاس

۱- یک رابطه‌ی ترتیبی خطی علاوه بر $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ و یک رابطه‌ی غیر خطی روی $P=\{a,b,c\}$ مثال بزنید.

۲- **آیا** رابطه‌ی ترتیبی شمولی $\subseteq$ در مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\{a,b\})$ خطی است؟ در $P=\{\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ **چطور؟**

۳- زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مثال بزنید که تحت رابطه‌ی شمولی $\subseteq$ زنجیر باشد.

در زیر چند واژه‌ی دیگر مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$ را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. ابتدا، با الگو قراردادن رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد، نمادگذاری متداول $x<y$ را می‌توان برای تاکید بر این که $x\leq y$ **ولی** $x\neq y$ به‌کار برد.

۷.۲.۳ تعریف

می‌گوییم که y **پوشش** یا **تالی** x است، یا x **مقدم بر** y است و می‌نویسیم $x \multimap y$ اگر $x<y$ ولی هیچ عضوی چون $z\in P$ به طور سره بین x و y وجود نداشته باشد؛ یعنی، عضو z با ویژگی $x<z<y$ وجود نداشته باشد.

توجه کنید که وقتی $x \multimap y$، آنگاه از $x\leq y\leq z$ نتیجه می‌گیریم که $y=z$ یا $y=x$.