مروری بر مفهوم میانگین

مثال - اتاقی را درنظر بگیرید که ۱۰ نفر در آن هستند. در این میان ۱ نفر ۱۴ ساله - ۲ نفر ۱۶ ساله - ۳ نفر ۱۸ ساله - ۱ نفر ۱۲ ساله و ۳ نفر ۱۰ ساله حضور دارند.

تعریف: $N(j)$ = تعداد افراد با سن j سال

$N(14)=1$ و $N(16)=2$ و $N(18)=3$ و $N(12)=1$ و $N(10)=3$

تعداد کل افراد اتاق $= N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j) = N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+$

$+N(4)+\cdots\cdots =$

$= N(14)+N(16)+N(18)+N(12)+N(10) =$

$= 1+2+3+1+3 = 10$ نفر

احتمال آنکه سن یک فرد انتخابی برابر با j باشد $= P(j) = \dfrac{N(j)}{N}$

$P(14)=\frac{1}{10}$ و $P(16)=\frac{2}{10}$ و $P(18)=\frac{3}{10}$ و $P(12)=1$ و $P(10)=3$

مجموع احتمالات $= \frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$

حال می‌خواهیم میانگین سن افراد اتاق را تعیین کنیم.

$$\text{میانگین سنی افراد} = \langle j \rangle = \frac{14 + 2\times 16 + 3\times 18 + 1\times 12 + 3\times 10}{10}$$

$$\Rightarrow \langle j \rangle = \frac{1}{10}\times 14 + \frac{2}{10}\times 16 + \frac{3}{10}\times 18 + \frac{1}{10}\times 12 + \frac{3}{10}\times 10$$

$$= \frac{1}{10}\left(1\times 14 + 2\times 16 + 3\times 18 + 1\times 12 + 3\times 10\right)$$

$$\langle j \rangle = \frac{1}{N}\sum j N(j)$$

$$\langle j \rangle = \sum j \frac{N(j)}{N} = \sum_j j P(j)$$

$$\boxed{\langle j \rangle = \sum_j P(j)\, j}$$

این رابطه برای میانگین گیری در موارد گسسته به کار می رود.

* بدیهی است که در مورد میانگین گیری کمیات پیوسته به جای $\sum$ از انتگرال استفاده می شود.

مقادیر انتظاری

با توجه به مروری که بر مبحث میانگین انجام شد، می‌توان مقدار انتظاری توابع x را محاسبه کرد.

$$\boxed{\langle f(x)\rangle = \int dx\, f(x)\, P(x,t) = \int dx\, \psi^*(x,t)\, f(x)\, \psi(x,t)}$$

برای آنکه انتگرال اخیر واگرا نشود، قید می‌گذاریم تابع موج ψ و مشتقات آنها در بی‌نهایت با سرعت کافی صفر شوند.

با داشتن تابع موج توصیف‌گر سیستم می‌توانیم مقدار میانگین توابع x را به دست آوریم.

$$\langle x\rangle = \int dx\, \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)$$

$$\langle x^2\rangle = \int dx\, \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)$$

سؤال: $\langle p\rangle$ یا $\langle f(p)\rangle$ را چگونه می‌توان به دست آورد؟

$$p = m\frac{dx}{dt}$$

$$\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = m\frac{d}{dt}\int dx\, \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)$$

$$= m\int dx\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}x\psi + \psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{m\hbar}{2mi}\int dx\left[\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi - \psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]$$

در خط آخر از روابط $\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \\ -i\hbar\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* \end{cases}$ استفاده شده است.

$$\Longrightarrow \langle p\rangle = \frac{\hbar}{2i}\int dx\left[\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi - \psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right] \overset{\star}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi\right) - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi) + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} +$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi - \psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi - \psi^*\psi - \psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + 2\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

در رابطه ★ جاگذاری می کنیم:

$$\Longrightarrow \langle p\rangle = \frac{\hbar}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi - \psi^*\psi - \psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] +$$

$$+ \frac{\hbar}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, 2\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi$$

انتگرال اول در سمت راست رابطه اخیر برابر با صفر است. زیرا این انتگرالده دیفرانسیل کامل

است و با توجه به آنکه توابع موج و مشتقات آن در $x=\pm\infty$ برابر با صفر می‌شود، در نتیجه انتگرال اول سمت راست صفر می‌شود.

$$\Longrightarrow \boxed{\langle p\rangle = \int dx\, \psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi}$$

به نظر می‌رسد که عملگر تکانه به صورت $p=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ در فضای مکان نمایش می‌شود.

$$\langle f(p)\rangle = \int dx\, \psi^*(x,t)\, f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$$

$$\langle p^2\rangle = \int dx\, \psi^*(x,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x,t)$$

به این ترتیب می‌توانیم مقدار چشمداشتی هر تابعی از تکانه را به دست آوریم.

سؤال - مقدار چشمداشتی تکانه، $\langle p \rangle$، در فضای تکانه چگونه است؟

$$\langle p \rangle = \int dx \; \psi^*(x,t) \; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \; \psi(x,t)$$

$$= \int dx \; \psi^*(x,t) \; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \; \phi(p) \; e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

حال $\langle p \rangle$ را در زمان $t=0$ بدست می‌آوریم:

$$= \int dx \; \psi^*(x) \; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \; \phi(p) \; e^{ipx/\hbar}$$

$$= \int dx \; \psi^* \; \frac{\hbar}{i} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \; \phi(p) \; \frac{ip}{\hbar} \; e^{ipx/\hbar}$$

$$= \int dp \; \phi(p) \; p \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \; \psi^*(x) \; e^{\frac{ipx}{\hbar}}}_{= \phi^*(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle p \rangle = \int dp \; \phi(p) \; p \; \phi^*(p)$$

$$\boxed{\langle p \rangle = \int dp \; \phi^*(p) \; p \; \phi(p)}$$