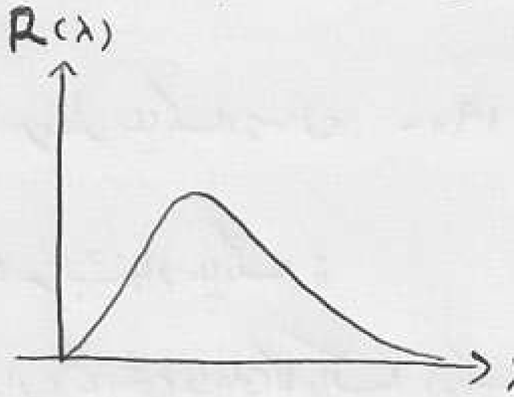
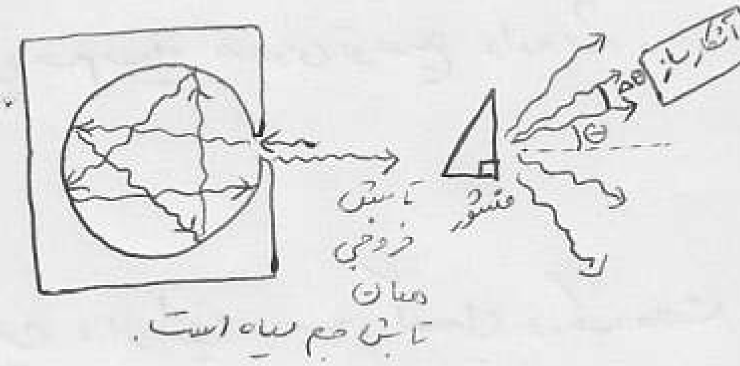
* پس از ساختن جسم سیاه و مطالعه تابش گسیل شده از جسم سیاه، نمودار





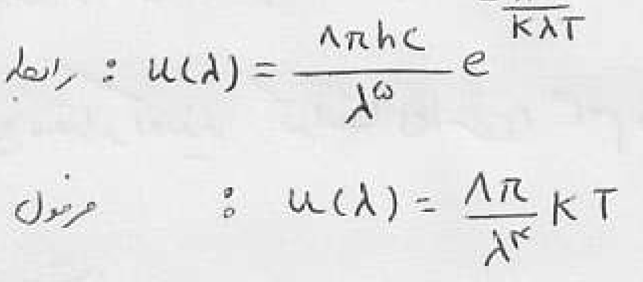
به طور تجربی به دست آمده است. این نمودار تجربی بیانگر آن است که تابش جسم سیاه یک طیف پیوسته از همه طول موج های ممکن است.

تا قبل از سال ۱۹۰۰ تلاش های زیادی در حوزه فیزیک کلاسیک انجام شده تا به طور تئوری نمودار فوق به دست آید. در واقع، تلاش های زیادی انجام شد تا با استفاده از محاسبه کلاسیکی انرژی تابشی گسیلیده، به فرمول $R(\lambda)$ در نتیجه $u(\lambda)$ بر حسب λ مناسبی دست یابند که نمودار تجربی فوق را به دست دهد.

* بررسی کلاسیکی تابش جسم سیاه: رابطه وین: $u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}$

فرمول ریلی-جینز: $u(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT$ و $R(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \frac{c}{4}$

λ طول موج، c سرعت نور، T دما، k ثابت بولتزمن است.



نمودار نقطه-خط مربوط به فرمول وین است
نمودار خط چین، همان نمودار تجربی است.
نمودار با خط پیوسته مربوط به فرمول ریلی-جینز است.

* دیدگاه پلانک (ورود به فیزیک کوانتومی یا فیزیک جدید)

بنابر نظر پلانک در سال ۱۹۰۰، تابش جسم سیاه به خوبی توضیح داده شد.

بنابر پیشنهاد پلانک:

میدان تابشی داخلی کاواک در یک دمای معین، از طریق جذب و گسیل در یک حالت تعادل ترمودینامیکی باقی می‌ماند. بنابر فرض او، مولکول‌ها در امتداد دیواره‌های محفظه کاواک به صورت یک نوسانگر هماهنگ نوسان می‌کنند. مولکول‌ها از میدان تابشی درون کاواک انرژی تابش جذب می‌کنند و سپس به روش مشخصی آن را به میدان تابشی درون کاواک برمی‌گردانند. پیشنهاد وی این بود که هیچ یک از این نوسانگرها (مولکول‌های روی دیواره) نمی‌توانند تابش کنند مگر آنکه انرژی نوسانی آنها به صورت مضرب صحیحی از یک مقدار کمینه معین باشد. این مقدار کمینه کوانتای انرژی نام دارد و متناسب با بسامد نوسان کننده است.

فرضیات پلانک را برمی‌شماریم

۱- یک نوسانگر یا مولکول ارتعاشی انرژی جذب شده از میدان تابشی درون کاواک را به صورت کوانتاهای انرژی $0h\nu$، $1h\nu$، $2h\nu$، ... به میدان تابشی باز می‌گرداند.

۲ـ تعداد نوسانگرهای گسیلنده انرژی به وسیله توزیع آماری بولتزمن تعیین می‌شود.

N تعداد کل نوسانگرها

E انرژی کل

$\longrightarrow$ انرژی متوسط هر نوسانگر $\bar{\varepsilon} = \dfrac{E}{N}$ (۱)

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \cdots$$

N_0: تعداد نوسانگر با انرژی صفر $(0h\nu)$

N_1: تعداد نوسانگر با انرژی $1h\nu$

N_2: تعداد نوسانگر با انرژی $2h\nu$

$$E = N_0(0h\nu) + N_1(h\nu) + N_2(2h\nu) + N_3(3h\nu) + \cdots$$

همچنین بنابر توزیع احتمال بولتزمن می‌دانیم:

$$N = N_0\, e^{-\frac{nh\nu}{KT}}$$

N: تعداد نوسانگر با انرژی $nh\nu$

با استفاده از فرمول توزیع آماری بولتزمن می‌توان نوشت

$$N_1 = N_0\, e^{-\frac{h\nu}{KT}} \ , \quad N_2 = N_0\, e^{-\frac{2h\nu}{KT}} \ , \ \cdots$$

$$\Longrightarrow N = N_0 + N_0 e^{-\frac{h\nu}{KT}} + N_0 e^{-\frac{2h\nu}{KT}} + N_0 e^{-\frac{3h\nu}{KT}} + \cdots$$

$$= N_0 \left[1 + e^{-\frac{h\nu}{KT}} + e^{-\frac{2h\nu}{KT}} + e^{-\frac{3h\nu}{KT}} + \cdots \right]$$

با توجه به بسط $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ می توانیم رابطه اخیر

را به صورت زیر بنویسیم.

$$N = N_0 \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}}} \quad (2)$$

(راهنمایی: $e^{-\frac{h\nu}{KT}}$ به مانند x و $e^{-\frac{2h\nu}{KT}}$ به مانند x^2 و .... در نظر گرفته شده است و سپس

از بسط استفاده گردید)

از طرف دیگر

$$\Longrightarrow E = N_0(0) + N_1(h\nu) + N_2(2h\nu) + N_3(3h\nu) + \cdots$$

$$= 0 + N_0 e^{-\frac{h\nu}{KT}} h\nu + N_0 e^{-\frac{2h\nu}{KT}} 2h\nu + \cdots$$

$$= N_0 h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}} \left[1 + 2\underbrace{e^{-\frac{h\nu}{KT}}}_{x} + 3\underbrace{e^{-\frac{2h\nu}{KT}}}_{x^2} + \cdots \right]$$

می توان از بسط $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$ استفاده کرد و

و رابطه اخیر را بازنویسی کرد

$$\rightarrow \quad E = N_0 h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}} \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{h\nu}{KT}}\right)^2} \qquad ③$$

$$①,②,③ \Longrightarrow \bar{\mathcal{E}} = \frac{E}{N} = \frac{\dfrac{N_0 h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}}}{(1-e^{-h\nu/KT})^2}}{\dfrac{N_0}{1-e^{-\frac{h\nu}{KT}}}} = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{KT}}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{\mathcal{E}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}}$$

تعداد نوسانگر در واحد حجم در بازه ی ν و $\nu+d\nu$

$$\boxed{N_{\nu,\nu+d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu}$$

استخراج رابطه ی $N_{\nu,\nu+d\nu}$ را می توانید از کتاب زیر مطالعه کنید:

Book: Principles of lasers, By: Orazio Svelto

ولی ما این رابطه را در این جا بدون اثبات می پذیریم و کار را ادامه می دهیم

چگالی انرژی در بازه بسامدی ν و $\nu+d\nu$ $\quad u(\nu)\,d\nu = \dfrac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \times \bar{\varepsilon}$

$$u(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu$$

$$\boxed{u(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}} \qquad (۴)$$

می‌دانیم $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ و $d\nu = -\dfrac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$ است.

همچنین می‌دانیم که بازه ν و $\nu+d\nu$ را می‌توان به بازه λ و $\lambda+d\lambda$ تبدیل کرد. بدیهی است که باید

$$u(\nu)\,d\nu = u(\lambda)\,d\lambda$$

در رابطه (۴)، همه ν ها را به $\dfrac{c}{\lambda}$ تبدیل می‌کنیم. و می‌دانیم اندازه $d\nu$ با اندازه $\dfrac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$ برابر است. درنتیجه می‌توان رابطه (۴) را برحسب λ بازنویسی کرد

$$\boxed{u(\lambda)\,d\lambda = \frac{8\pi hc\,d\lambda}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1\right)}}$$

در حد طول موج های کوتاه چه اتفاقی می افتد؟

$$\text{در حد طول موج های کوتاه} \Rightarrow e^{\frac{hc}{k\lambda T}} \gg 1 \Rightarrow u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc\, d\lambda}{\lambda^5 e^{hc/k\lambda T}}$$

به قانون وین تقلیل می یابد

در حد طول موج های بلند چه اتفاقی می افتد؟

$$\text{در حد طول موج های بلند} \Rightarrow e^{\frac{hc}{k\lambda T}} \ll 1 \Rightarrow u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc\, d\lambda}{\lambda^5\left(1+\frac{hc}{k\lambda T}+\underbrace{\cdots\cdots}_{\text{صرفنظر می شود}}-1\right)} \Rightarrow$$

$$u(\lambda)\,d\lambda = \frac{8\pi kT\, d\lambda}{\lambda^4}$$

در اینجا از بسط $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ استفاده شده است.

نتیجه می شود که در حد طول موج های بلند، فرمول پلانک به رابطه ریلی - جینز تقلیل می یابد.

حال می توان از فرمول پلانک استفاده کرد و قانون جابجایی را تحقیق کرد.

به عبارت دیگر به دنبال λ_{max} هستیم. λ_{max} طول موجی است که در آن تابندگی بیشینه می‌شود.

$$\frac{d}{d\lambda} u(\lambda) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1\right)}\right] = 0 \xrightarrow[\text{می‌توان محاسبه کرد}]{\text{به راحتی}} \lambda_{max} = \frac{ch}{4{,}955\ kT}$$

با قرار دادن مقدارهای c ، h و K به دست می‌آید

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad , \quad b = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m.K$$

انرژی کل
$$E = U = \int_0^\infty u(\lambda)\,d\lambda = \int_\infty^0 u(\nu)\,d\nu = \int_\infty^0 \frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}$$

با تغییر متغیر $x = \frac{h\nu}{kT}$ می‌توان انتگرال را بازنویسی کرد

$$= \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^4}\int_\infty^0 \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^4}\int x^3\left(e^{-x}+e^{-2x}+\cdots\right)dx$$

$$= \cdots = \frac{48\pi k^4 T^4}{h^3 c^4}\,\frac{\pi^4}{90}$$

تابندگی $R(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda)$

توان تابشی $P_\lambda = \frac{c}{4} E = \frac{c}{4} U$

$$P_\lambda = \frac{c}{4} \frac{48 \pi k^4 T^4 \pi^4}{h^3 c^3 \, 90}$$

$$P_\lambda = \sigma T^4 \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3}$$

ثابت استفان - بولتزمن

لازم به ذکر است که پلانک با فرضیات ای که انجام داد و با گسسته فرض کردن مقدار تبادل انرژی توانست رابطه ای را برای تابش جسم سیاه به دست آورد که به خوبی با نمودار تجربی همخوانی داشته است. در حد طول موج های بلند و طول موج های کوتاه به روابط کلاسیکی از قبل موجود تقلیل یافته و با اصل همخوانی نیز سازگار است.