توجه:

همیشه عملگر Θ را بر روی کت حالت اثر می‌دهیم. از اثر دادن Θ بر روی برا پرهیز کنید. منظور این است که در روابط Θ را از سمت چپ روی برا اثر ندهید. چرا که نمادگذاری برا و کت برای عملگرهای خطی نوشته شده است و برای عملگرهای پادخطی باید نکاتی در نظر گرفته شود.

$$\langle\beta|\Theta|\alpha\rangle = \langle\beta|\cdot\Theta|\alpha\rangle$$

حال می‌خواهیم اثر عملگر برگشت زمان Θ را بر روی کت های حالت بررسی کنیم.

برای شروع این بررسی، یک رابطه کاربردی و مفید را معرفی می‌کنیم.

عملگر خطی $\underbrace{X}_{\text{عملگر خطی}}$ و عملگر پادیکانی $\underbrace{\Theta}_{\text{عملگر پادیکانی}}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\Theta\left[a_1|\alpha\rangle + a_2|\beta\rangle\right] = a_1^*\Theta|\alpha\rangle + a_2^*\Theta|\beta\rangle$$

$$X\left[a_1|\alpha\rangle + a_2|\beta\rangle\right] = a_1 X|\alpha\rangle + a_2 X|\beta\rangle$$

رابطه مفید و کاربردی:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

به طوری که:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle \quad \text{و} \quad |\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle$$

برای اثبات رابطه، اقدام می‌کنیم

تعریف $|\gamma\rangle = \Theta^{+}|\beta\rangle$

$$\langle\gamma| = \langle\beta|\Theta$$

خاصیت عملگرهای پادیکانی

$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle$
$|\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle$

$$\langle\beta|\Theta|\alpha\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle \overset{\downarrow}{=} \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta|\gamma\rangle =$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|\Theta\Theta^{+}|\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta\Theta^{+}\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|\Theta\Theta^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle\beta|\Theta|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta\Theta^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle} \quad \text{I}$$

حال اگر عملگر خطی دلخواه Θ یک عملگر هرمیتی به نام A باشد، یعنی

if $\Theta = A \qquad (A = A^{+})$

$$\text{I} \Longrightarrow \langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

$$\boxed{\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle \quad \text{A هرمیتی و}} \quad \text{II}$$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = +\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\beta}\rangle$$

$$A = \Theta A \Theta^{-1}$$

مشاهده‌پذیر A تحت برگشت زمان زوج است.

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\beta}\rangle$$

$$A = -\Theta A \Theta^{-1}$$

مشاهده‌پذیر A تحت عملگر برگشت زمان فرد است.

$$A = \pm \Theta A \Theta^{-1}$$

if $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$:

$$\langle\alpha|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A \Theta^{-1}|\tilde{\alpha}\rangle$$

$$= \pm \langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\alpha}\rangle$$

$\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ مقدار چشداشتی نسبت به حالت $|\alpha\rangle$

$\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\alpha}\rangle$ مقدار چشداشتی عملگر A نسبت به یک حالتی که تحت تأثیر عملگر برگشت زمان قرار گرفته است

$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle$

اگر عملگری (مشاهده‌پذیری) تحت عمل برگشت زمان زوج باشد بدیهی است که

$$\langle\alpha|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\alpha}\rangle$$

زیرا که مقدار چشداشتی نسبت به یک حالت $|\alpha\rangle$ و مقدار چشداشتی آن نسبت به یک حالت انعکاس زمانی یافته باید یکی باشد.

اما

اگر مشاهده‌پذیری تحت عملگر برگشت زمان فرد باشد بدیهی است که

$$\langle\alpha|A|\alpha\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\alpha}\rangle$$

یعنی مقدار چشداشتی عملگر A بعد از اعمال عملگر برگشت زمان، منفی می‌شود.

مثال) عملگر تکانه (P هرمیتی)

با توجه به شناختی که در مورد عملگر برگشت زمان داریم، انتظار داریم که در انعکاس زمان یا برگشت حرکت، تکانه علامت منفی بگیرد.

درنتیجه انتظار داریم که مقدار چشداشتی تحت عمل انعکاس زمانی منفی شود:

$$\left.\begin{array}{l} \langle\alpha|P|\alpha\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|P|\tilde{\alpha}\rangle \quad \longrightarrow \text{مورد انتظار} \\ \langle\alpha|P|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta P \Theta^{-1}|\tilde{\alpha}\rangle \quad \xrightarrow{(II)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Theta P \Theta^{-1} = -P}$$

به عبارت دیگر، P تحت عمل برگشت زمان، فرد است.

$$\boxed{\begin{array}{c} \Theta P \Theta^{-1} = -P \\ \text{یا} \\ P = -\Theta P \Theta^{-1} \end{array}}$$

$$\Theta^{-1} P \Theta = -P \xrightarrow{\text{روی } |P'\rangle \text{ اثر دهید}} \Theta^{-1} P \Theta |P'\rangle = -P|P'\rangle$$

$$\Theta^{-1} P \Theta |P'\rangle = -P'|P'\rangle$$

از چپ در Θ ضرب کنید

$$\underbrace{\Theta\Theta^{-1}}_{1} P \Theta |P'\rangle = -P'\Theta|P'\rangle$$

$$P\Theta|P'\rangle = -P'\Theta|P'\rangle \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$P|P'\rangle = P'|P'\rangle \longrightarrow P|-P'\rangle = -P'|-P'\rangle \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow P\,\Theta|p'\rangle = -p'\,\Theta|p'\rangle \\ ② \Rightarrow P\,|-p'\rangle = -p'\,|-p'\rangle \end{array}\right\} \quad \boxed{\Theta|p'\rangle \propto |-p'\rangle}$$

مثال) عملگر مکان (x هرمیتی)

با توجه به مفهوم عملگر برگشت زمان ، انتظار داریم (ذره روی محور اولیه برمی‌گردد)

$$\left.\begin{array}{l} \text{بنا به انتظار} \rightarrow \langle\alpha|x|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|x|\tilde{\alpha}\rangle \\ \text{II} \rightarrow \langle\alpha|x|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta x \Theta^{-1}|\tilde{\alpha}\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \Theta x \Theta^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Theta|x'\rangle \propto |x'\rangle}$$

زیرا

$$\Theta^{-1} x \Theta = x \xrightarrow{|x'\rangle} \Theta^{-1} x \Theta |x'\rangle = x|x'\rangle \longrightarrow$$

$$\Theta\Theta^{-1} x \Theta|x'\rangle = x'\,\Theta|x'\rangle$$

$$x\,\Theta|x'\rangle = x'\,\Theta|x'\rangle$$

از سوی دیگر $x|x'\rangle = x'|x'\rangle$ $\longrightarrow$ $\Theta|x'\rangle \propto |x'\rangle$