وقت ۱۵۰ دقیقه- ماشین حساب و یک برگه فرمول آزاد

سوال ۱- اگر $z^c = e^{c\ln z}$ باشد آنگاه رابطه زیر را ساده کنید؟ **۱.۵ نمره**

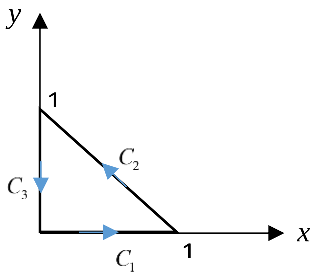
$$(1-2i)^{1+2i} = ?$$

پاسخ:

$$(1-2i)^{1+2i} = e^{(1+2i)\ln(1-2i)} = \exp((1+2i)\ln(1-2i)) = \exp\left((1+2i)\left(\ln\sqrt{5} - 1.107i \pm 2n\pi i\right)\right)$$
$$= \exp\left(\ln\sqrt{5} - 1.107i \pm 2n\pi i\right)\exp\left(2i\ln\sqrt{5} + 2.214 \mp 4n\pi\right)$$
$$= \exp\left(\ln\sqrt{5}\right)\exp(-1.107i)\exp(i\ln 5)\exp(2.214 \mp 4n\pi)$$
$$= \sqrt{5}e^{(2.214\mp 4n\pi)}\left(\cos(\ln(5) - 1.107) + i\sin(\ln(5) - 1.107)\right)$$
$$\text{if } n = 0 \text{ so we have: } \sqrt{5}e^{(2.214\mp 4n\pi)}\left(\cos(\ln(5) - 1.107) + i\sin(\ln(5) - 1.107)\right) = 17.943 + 9.855i$$

سوال ۲- انتگرال روی خط مختلط تابع روبرو را بر روی مسیر مثلثی با رئوس 0 ، 1 و i بصورت ساعتگرد محاسبه کنید؟ **۲.۵ نمره**

$$I = \oint_C (z - \bar{z})^2\, dz$$



پاسخ:

حل گام به گام از مسیر :

۱- تعیین تابع $z(t)$ از مسیر C_1: معادله خط را در صفحه مختلط تعیین می کنیم که برابر است با:

$$C_1: \ z(t) = t, \quad 0 \le t \le 1$$
$$x(t) = t, \quad y(t) = 0,$$

۲- محاسبه مشتق تابع $z(t)$ ، $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

$$\dot{z}(t) = 1$$

۳-جایگذاری در رابطه استار و برآورد انتگرال برحسب t از 0 تا 1.

$$(z - \bar{z})^2 = \left(x + iy - (x - iy)\right)^2 = (2iy)^2 = -4y(t)^2$$

$$\int_{C_1} 0\,dz = 0$$

حل گام به گام از مسیر C_2:

۱- تعیین تابع $z(t)$ از مسیر C_2:

۲- محاسبه مشتق تابع $z(t)$ ، $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

$$C_2: \ z(t)=(1-t)+it, \quad \dot{z}(t)=-1+i, \quad f(z(t))=-4y(t)^2=-4t^2, \ \ 0\le t\le 1$$

۳-جایگذاری در رابطه استار و برآورد انتگرال برحسب t از 0 تا 1.

$$\int_{C_1}(z-\bar{z})^2dz=\int_{C_1}-4y^2dz=\int_0^1-4t^2(-1+i)dt=\int_0^1(4t^2-4it^2)dt=\frac{4}{3}(1-i)$$

حل گام به گام از مسیر C_3:

۱- تعیین تابع $z(t)$ از مسیر C_3:

۲- محاسبه مشتق تابع $z(t)$، $\dot{z}(t)=\frac{dz}{dt}$

$$-C_3: \ z(t)=it, \quad \dot{z}(t)=i, \quad f(z(t))=-4y(t)^2=-4t^2, \ \ 0\le t\le 1$$

۳-جایگذاری در رابطه استار و برآورد انتگرال برحسب t از 0 تا 1.

$$\int_{-C_3}(z-\bar{z})^2dz=\int_{-C_3}-4y^2dz=\int_1^0-4t^2(i)dt=\int_0^1 4it^2dt=\frac{4}{3}i$$

در نهایت نتیجه تمام مسیرها را با هم جمع می کنیم و چون جهت چرخش ساعتگرد است در یک منفی ضرب می شود:

$$I=\oint_C(z-\bar{z})^2\,dz=-\left(\int_{C_1}(z-\bar{z})^2dz+\int_{C_2}(z-\bar{z})^2dz+\int_{C_3}(z-\bar{z})^2dz\right)=-\left(0+\frac{4}{3}(1-i)+\frac{4}{3}i\right)=-\frac{4}{3}=-1.33$$

سوال ۳- انتگرال توابع زیر را محاسبه کنید؟**۲.۵ نمره**

$$I_1=\oint_C\left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-9}+ze^{\pi/z}\right)dz, \quad C: 9x^2+y^2=16 \quad \text{counterclockwise}$$

پاسخ: اولین جمله انتگرالده دارای چهار قطب ساده ی $z_1=\sqrt{3}$، $z_2=-\sqrt{3}$، $z_3=\sqrt{3}i$ و $z_4=-\sqrt{3}i$ است که ریشه سوم و چهارم در نیم صفحه بالایی هستند. بنابراین فقط مانده های این دو قطب را تعیین می کنیم.

$$\operatorname{Res}_{z=2i}\frac{ze^{\pi z}}{z^4-9}=\left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=\sqrt{3}i}=-\frac{e^{\sqrt{3}i\pi}}{12}, \qquad \operatorname{Res}_{z=-2i}\frac{ze^{\pi z}}{z^4-9}=\left[\frac{e^{\pi z}}{4z^2}\right]_{z=-\sqrt{3}i}=-\frac{e^{-\sqrt{3}i\pi}}{12}$$

جمله دوم انتگرالده در نقطه صفر دارای تکینه است. برای تعیین مانده آن سری لوران آن را می نویسیم که برابر است با:

$$ze^{\pi/z} = z\left(1+\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^2}{2!z^2}+\frac{\pi^3}{3!z^3}+\dots\right) = z+\pi+\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{z}+\frac{\pi^3}{3!z^2}+\dots \quad b_1 = \frac{\pi^2}{2}$$

$$I_1 = \oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-9}+ze^{\pi/z}\right)dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res}\left[f(z)\right] = 2\pi i\left(-\frac{e^{\sqrt{3}i\pi}}{12}-\frac{e^{-\sqrt{3}i\pi}}{12}+\frac{\pi^2}{2}\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{\cos\sqrt{3}\pi}{6}+\frac{\pi^2}{2}\right) = 2\pi i\left(-0.111+\frac{\pi^2}{2}\right) = 30.31i$$

سوال۴- معادله موج یک بعدی را با شرایط مرزی و اولیه زیر درنظر بگیرید. مطلوبست روش حل به روش تفاضلات محدود را با ذکر فرمول. توضیح دهید و برای پیدا کردن مقادیر روی مرزها از روش تفاضل محدود از چه رابطه ای استفاده می‌کنید؟ رابطه را استخراج کنید؟ **۴.۵ نمره**

$$(1):\quad * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0 \quad t\ge 0 \qquad \text{B.C}$$

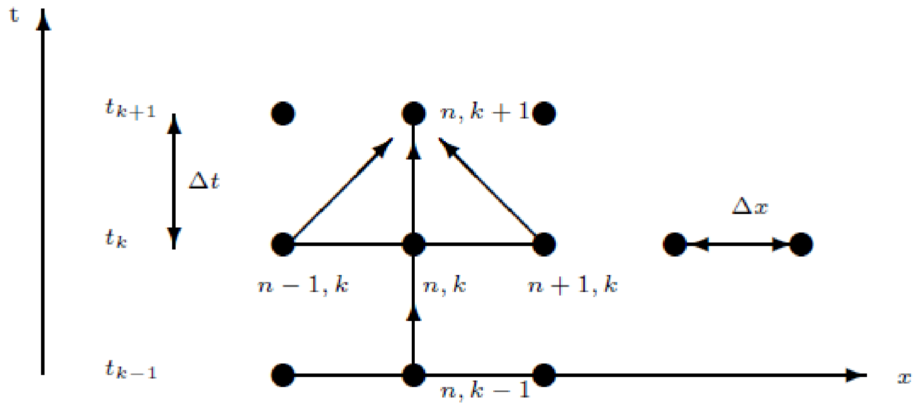
$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x) \quad 0\le x\le 1 \quad \text{I.C}$$

Solution:

We introduce a finite difference mesh $x_n = n\Delta x$, $t_k = k\Delta t$and let the corresponding nodal values be denoted by:

$$u(x_n, t_k) \simeq u_n^k.$$

Now approximating derivatives by central differences both in space and time we obtain



$$(2):\quad \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\Delta t^2} = c^2\left(\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{\Delta x^2}\right)+\mathrm{O}\left(\Delta x^2,\Delta t^2\right).$$

$$(3):\quad u_n^{k+1} = 2u_n^k - u_n^{k-1}+\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k\right).$$

$$(4):\quad \underset{\text{time level } k+1}{u_n^{k+1}} = \underbrace{r^2u_{n+1}^k+2\left(1-r^2\right)u_n^k+r^2u_{n-1}^k}_{\text{time level } k} - \underset{\text{time level } k-1}{u_n^{k-1}} \quad , \quad r=\frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Here $r = c\Delta t/\Delta x$ is known as the Courant Number. We observe that the Discrete Equation (4) involves three distinct levels in which known data is transferred from steps $k-1$ and k to step $k+1$.

Initial Conditions - Starting the Solution

The 3-level scheme poses some challenges when imposing the initial conditions. If we imagine a row of false mesh points at time $t = -\Delta t = t^{-1}$, then the initial velocity condition (1b) can be approximated using central differences as:

$$(5): \quad \frac{u_n^1 - u_n^{-1}}{2\Delta t} = g(x_n) \quad \Rightarrow \quad u_n^{-1} = u_n^1 - 2\Delta t g(x_n)$$

Now we assume that the Discrete Wave Equation (4) also holds at $t = 0$, so that:

$$(6): \quad u_n^1 = r^2 u_{n+1}^0 + 2(1-r^2)u_n^0 + r^2 u_{n-1}^0 - u_n^{-1}$$

Now substituting (5) into (6) and re-arranging we obtain:

$$(7): \quad u_n^1 = \frac{1}{2} r^2 u_{n+1}^0 + (1-r^2)u_n^0 + \frac{1}{2} r^2 u_{n-1}^0 + \Delta t g(x_n)$$

Since $u_n^0 = f(x_n)$and $g(x_n)$ are known, we are now in a position to specify the first two rows of nodes. This is sufficient to start the recursion (6) for all subsequent steps.

Implementing Derivative Boundary Conditions:

Assume that the boundary conditions (1b) are changed to

$$\text{B.C:} \quad u(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad t \geq 0$$

Consider a central difference approximation to $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}(L,t)$, where $x_N = N\Delta x = L$,

$$(8): \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \frac{u(x_N + \Delta x, t) - u(x_N - \Delta x, t)}{2\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x_N + \Delta x, t) = u(x_N - \Delta x, t) \quad (*)$$

Since $x_N = L$ we observe that $x_N + \Delta x$ is outside the domain we introduce an extra column u_{N+1} into which we copy the values u_{N-1}. In the column x_N we implement the same difference approximation for the Wave Equation, namely:

$$(9): \quad \underset{\text{time level } k+1}{u_N^{k+1}} = \underbrace{r^2 u_{N+1}^k + 2(1-r^2)u_N^k + r^2 u_{N-1}^k}_{\text{time level } k} - \underset{\text{time level } k-1}{u_N^{k-1}} \quad , \quad r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

while $u_{N+1}^k = u_{N-1}^k$ (see (8)) since column u_{N-1}^k is copied to column u_{N+1}^k. Note that this BC could be implemented another way without introducing the additional column, by eliminating u_{N+1} from (9):

$$(10): \quad \underset{\text{time level } k+1}{u_N^{k+1}} = \underbrace{2(1-r^2)u_N^k + 2r^2 u_{N-1}^k}_{\text{time level } k} - \underset{\text{time level } k-1}{u_N^{k-1}}$$

If this latter equation is implemented at x_N there is no need to introduce an extra column u_{N+1} or to implement the difference equation given in (**) as the derivative boundary condition is taken care of automatically.

1D Wave Equation: Forward-Time Central-Space Method (FTCS)

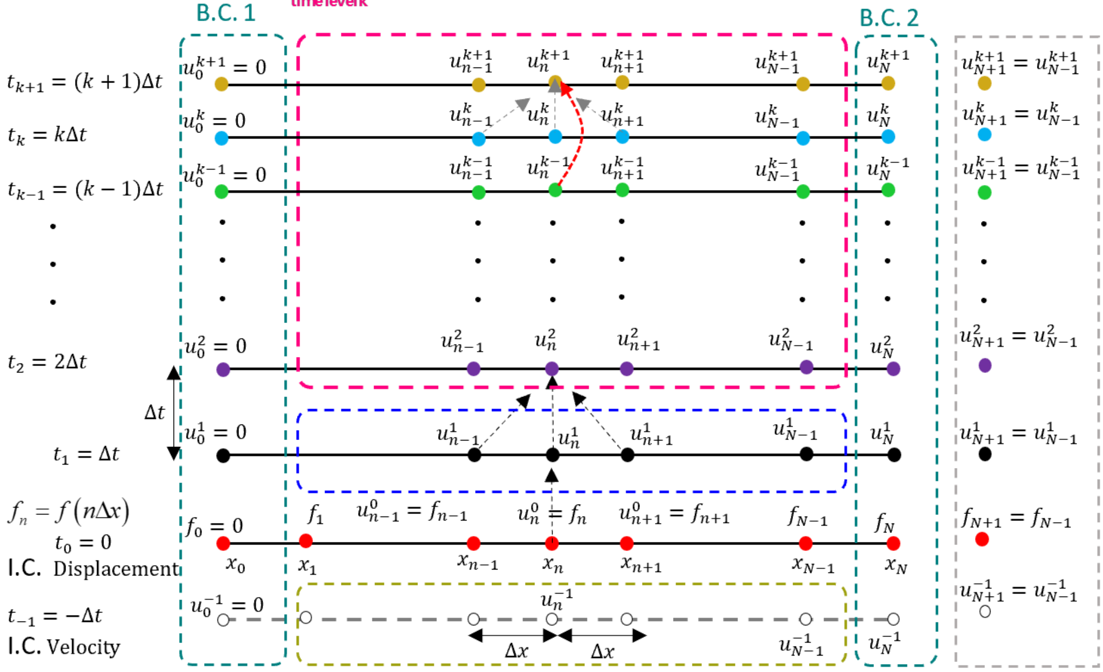
$$*\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \text{B.C.1: } u(0,t)=0,\quad \text{B.C.2: } \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0\quad t\ge 0$$

$$\text{I.C. Displacement}: u(x,0)=f(x),\ \text{I.C. Velocity}: \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x)\quad 0\le x\le 1$$

$$u(x_n,t_k)=u_n^k$$

$$\underbrace{u_n^{k+1}}_{\text{time level k+1}}=\underbrace{r^2u_{n+1}^k+2(1-r^2)u_n^k+r^2u_{n-1}^k}_{\text{time level k}}-\underbrace{u_n^{k-1}}_{\text{time level k-1}},\quad r=\frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\underbrace{u_N^{k+1}}_{\text{time level k+1}}=\underbrace{2(1-r^2)u_N^k+2r^2u_{N-1}^k}_{\text{time level k}}-\underbrace{u_N^{k-1}}_{\text{time level k-1}}$$

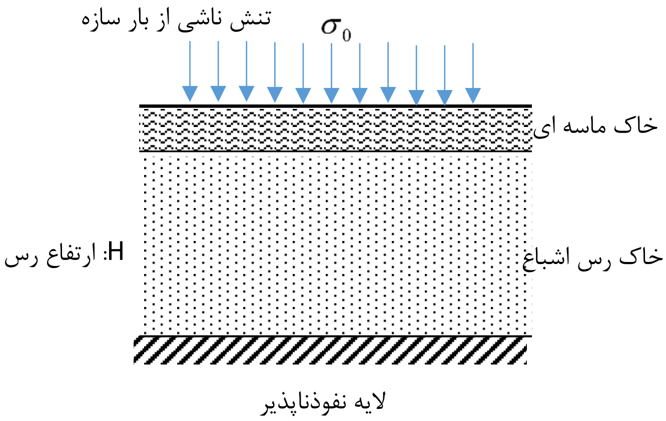


$$u_n^1=\frac{1}{2}r^2u_{n+1}^0+(1-r^2)u_n^0+\frac{1}{2}r^2u_{n-1}^0+\Delta t g(x_n)\qquad u_n^{-1}=u_n^1-2\Delta t g(n\Delta x)$$

Additional Column

Ali Asgari: Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran, Email: a.asgari@umz.ac.ir.

سوال۵- معادله زیر یک معادله تحکیم یک بعدی است که در مهندسی عمران کاربردی است. در آن u فشار آب حفره‌ای که تابعی از مکان و زمان است. مطلوبست تعیین مقادیر فشار آب در هر نقطه از مکان و زمان از روش SM؟ **۴.۵ نمره**



$$*\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}$$

پاسخ:

- **برای حل معادله تحکیم سه گام وجود دارد:**

گام اول: تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به دو معادله دیفرانسیل معمولی

$$*\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad \left|\begin{array}{lll} u(0,t)=\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=H}=0 & t\ge 0 & \text{B.C}\\ u(z,0)=u_0(z)=\sigma_0 & 0\le z\le H & \text{I.C}\end{array}\right.$$

روابط مقابل را در رابطه استار جایگذاری می کنیم:

$$u(z,t)=F(z)G(t),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=F(z)\dot G(t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=F''(z)G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ \Rightarrow\ u(z,t)=F(z)G(t),\quad F(z)\dot G(t)=c_vF''(z)G(t)\ \Rightarrow\ \frac{\dot G}{c_vG}=\frac{F''}{F}\ **$$

حال فرض می کنیم که رابطه دو استار برابر با مقدار عددی ثابت است و نمی تواند متغییر باشد. با این کار یک معادله دیفرانسیل جزئی به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد.

$$\frac{F''}{F}=\frac{\dot G}{c_vG}=\mu\ \Rightarrow\ \begin{cases}F''-\mu F=0\\ \dot G-c_v\mu G=0\end{cases}$$

گام دوم: اعمال شرایط مرزی نه اولیه!

عدد μ می تواند به سه حالت باشد ولی وقتی μ مقداری منفی باشد منجر به جواب خواهد شد. چرا؟؟

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0\ \Rightarrow\ G(t)\ne 0\ \text{ then }\ F(0)=0$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=H}=F'(H)G(t)=0\ \Rightarrow\ G(t)\ne 0\ \text{ then }\ F'(H)=0$$

$$\begin{cases}F''-\mu F=0,\quad F(0)=0,\quad F'(H)=0\\ \dot G-c_v\mu G=0\end{cases}\to\begin{cases}\mu=0\quad\text{or}\quad \mu=p^2\quad F\equiv 0\ \times\\ \mu=-p^2,\ F''+p^2F=0\to F(z)=A\cos pz+B\sin pz\end{cases}$$

$$F(0)=0 \Rightarrow F(0)=A\cos 0+B\sin 0=A=0,\quad F'(H)=0 \Rightarrow F'(H)=B\cos pH=0 \Rightarrow B\neq 0,$$

$$\cos pH=0,\quad p=\frac{(2n+1)\pi}{2H},\ n=0,1,2,\ldots \ \Rightarrow\ F_n(z)=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right),\quad \mu=-p^2=-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2,\ n=0,1,2,\ldots$$

$$\left\{\dot{G}-c_v\mu G=0\ ,\ \Rightarrow\ G_n=B_n e^{c_v\mu t}=B_n e^{c_v\mu t}=B_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 c_v t}\right.$$

$$u_n(z,t)=F_n(z)G_n(t)=B_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 c_v t}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right)$$

گام سوم: حل کامل مسئله اعمال شرایط اولیه با کمک سری فوریه

با توجه به اینکه اگر u_1 و u_2 و … جواب معادله خطی باشد آنگاه مجموع آنها نیز جواب معادله است، بنابراین داریم:

$$u(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 c_v t}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right),\quad u(z,0)=u_0(z)=\sigma_0,$$

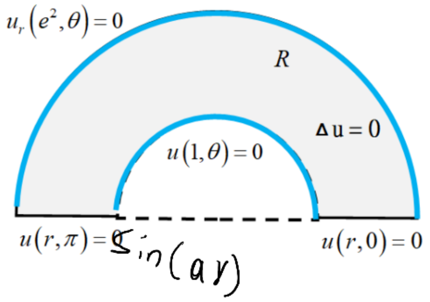
$$u(z,0)=u_0(z)\ \Rightarrow u(z,0)=u_0(z)=\sigma_0=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right)\ \xrightarrow{\text{Using Fourier sine series}} B_n=\frac{2}{H}\int_0^H\sigma_0\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right)dz$$

$$u(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{H}\int_0^H u_0(z)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right)dz\right)\exp\left\{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 c_v t\right\}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}z\right),$$

سوال ۶- معادله لاپلاس قطبی زیر را حل کنید؟**۴.۵ نمره**

$$*\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 1<r<e^2, \quad 0<\theta<\pi$$

$$u(r,0)=0,\ \ u(r,\pi)=\sin(ar),\ \ u(1,\theta)=0,\ \frac{\partial}{\partial r}u(e^2,\theta)=0$$



$$u(r,\theta)=W(r)\Theta(\theta), \qquad r^2\frac{(W''+W'/r)}{W} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda^2 \ **$$

$$\begin{cases} r^2W''+rW'+\lambda^2 W=0,\ \ W(1)=0,\ W'(e^2)=0 \ \Rightarrow\ \lambda_n=(2n+1)\dfrac{\pi}{4},\ \ n=0,1,2,\dots \quad W(r)=\sin(\lambda_n \ln r) \\ \Theta''(\theta)-\lambda^2\Theta(\theta)=0,\ \ \Theta(0)=0, \quad \Theta_n(\theta)=B_n\sinh(\lambda_n\theta) \end{cases}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}W(r)\Theta(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n\ln r),$$

$$f(r)=u(r,\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sinh(\lambda_n\pi)\sin(\lambda_n\ln r)=\sin(ar),$$

$$B_n\sinh(\lambda_n\pi)=\frac{\int_1^{e^2}\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)\,dr}{\int_1^{e^2}\frac{1}{r}\sin^2(\lambda_n\ln r)\,dr}$$

$$now:\ \int_1^{e^2}\frac{1}{r}\sin(\lambda_m\ln r)\sin(\lambda_n\ln r)\,dr \xrightarrow[r=1\Rightarrow x=0,\ r=e^2\Rightarrow x=2]{x=\ln r,\ dx=\frac{1}{r}dr} \int_0^2\sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\delta_{mn}$$

$$B_n\sinh(\lambda_n\pi)=\frac{\int_1^{e^2}\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)\,dr}{1} \quad \Rightarrow B_n=\frac{\int_1^{e^2}\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)\,dr}{\sinh(\lambda_n\pi)}$$

$$B_n=\frac{1}{\sinh(\lambda_n\pi)}\int_1^{e^2}\frac{1}{r}\sin(ar)\sin(\lambda_n\ln r)\,dr$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n\ln r),$$

با آرزوی موفقیت برای شما عزیزان

علی عسگری، عضو هیات علمی گروه مهندسی عمران،

دانشکده مهندسی و فناوری, دانشگاه مازندران