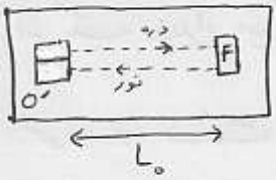
جمع سرعت نسبیتی

دستگاه زمان سنج زیر را در نظر بگیرید. دره از E شلیک می‌شود با سرعت u' نسبت به محفظه به سمت لامپ درخشی F می‌رود. وقتی ذره به F می‌رسد، لامپ F چشمک می‌زند و یک سیگنال نوری به سمت آشکارساز D می‌فرستد.



O' ناظر ساکن در محفظه است.

O ناظر ساکن روی زمین است.

زمان شلیک ذره از E و رفت آن به F و برگشت نور از F به D از دید O'

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{u'} + \frac{L_0}{c}$$

حال این آزمایش را به مانند آزمایش صفحه ۴ تکرار می‌کنیم.

از دید ناظر O

$$u\Delta t_1 = L + v\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{u-v}$$

$$c\Delta t_2 = L - v\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$$

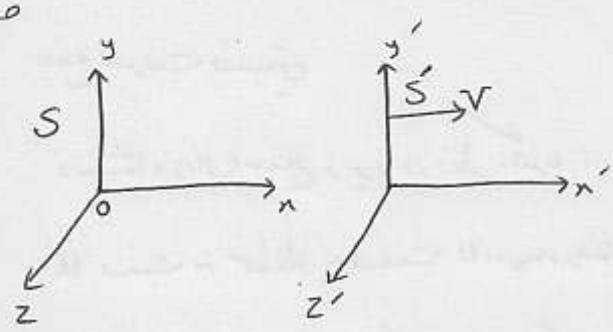
$$\Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{u-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+u)}{(u-v)(c+v)}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{L(c+u)}{(u-v)(c+v)} = \frac{L_0\left(\frac{1}{u'}+\frac{1}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

ساده سازی ⟶

$$\boxed{u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}}$$

جمع سرعت نسبیتی

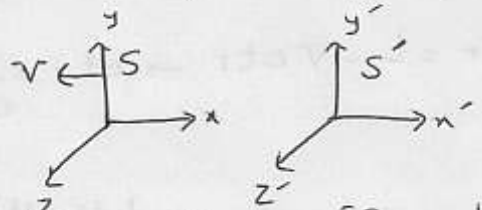


نتیجه‌گیری:

اگر یک رویداد فیزیکی یا یک شی دارای سرعت u_x در امتداد محور x نسبت به چارچوب S باشد و دارای سرعت u'_x در امتداد محور x' در چارچوب S' باشد و سرعت S' نسبت به S برابر با V در امتداد محور مشترک x و x' باشد، آنگاه:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}$$

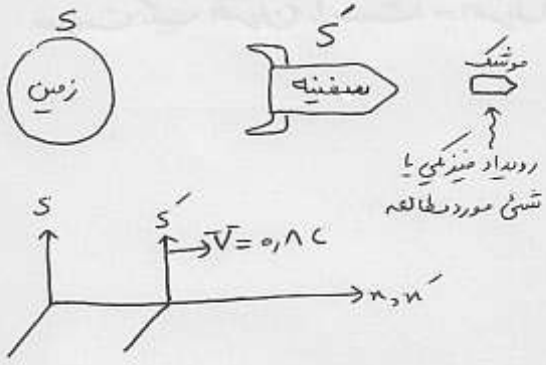
به دلیل وجود تقارن دو جانبه اگر حرکت نسبی را به صورت زیر



در نظر بگیریم می‌توان به طور مستقیم و بدون مراجعه به نتیجه‌گیری فوق:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}$$

مثال) یک سفینه فضایی با سرعت $0,8c$ از زمین دور می‌شود و یک موشک به طور موازی با جهت حرکتش شلیک می‌کند. اگر سرعت موشک نسبت به سفینه $0,4c$ باشد، سرعت آن را نسبت به زمین بیابید.



u_x = سرعت موشک نسبت به زمین

u'_x = سرعت موشک نسبت به سفینه

V = سرعت S' نسبت به S (سرعت سفینه نسبت به زمین)

$V = 0,8c$

$u'_x = 0,4c$

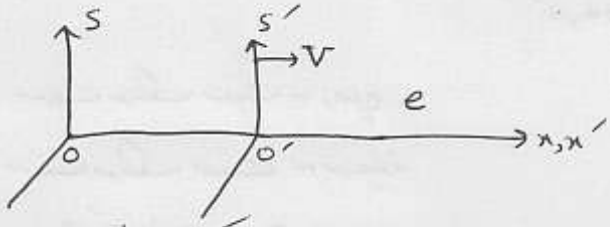
$u_x = ?$

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}$$

$$= \frac{0,4c + 0,8c}{1 + 0,4 \times 0,8 \frac{c^2}{c^2}}$$

$$= 0,95c$$

مثال) اتم های یک ماده رادیواکتیو را نسبت به آزمایشگاه درحال سکون در نظر بگیرید. در یک واپاشی، دو الکترون در جهت های مخالف از نمونه اولیه پرتاب می‌شود. سرعت هر الکترون نسبت به ناظر آزمایشگاه ۰٫۷۷c می باشد. سرعت یک الکترون را نسبت به الکترون دیگر بیابید.



سرعت S' نسبت به S = سرعت ماده رادیواکتیو نسبت به e چپ = $V = 0{,}7V\,c$

سرعت e راست نسبت به ماده رادیواکتیو یا S' = $u'_x = 0{,}7V\,c$

سرعت e راست رونده نسبت به S یا الکترون چپ رونده = $u_x = ?$

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}} = \frac{0{,}7V\,c + 0{,}7V\,c}{1 + \left(\frac{0{,}7V\,c}{c}\right)^2}$$

$$\boxed{u_x = 0{,}92c < c}$$

توجه: این مسأله قبلاً در نسبیت نیوتنی حل شده بود و جواب $\boxed{u_x = 1{,}34c > c}$ به دست آمده بود.

اثر دوپلر نسبیتی

در اثر دوپلر کلاسیک، سرعت چشمه و ناظر نسبت به محیط باعث می‌شود که بسامد دریافت شده توسط ناظر با بسامد فرستاده شده توسط چشمه متفاوت شود.

امّا

در نسبیت خاص، بر اساس اصل موضوع اول اینشتین هیچ محیط یا چارچوب مرجع ممتازی وجود ندارد و همه چارچوب های مرجع لخت هم ارز هستند.

در اثر دوپلر نسبیتی برای امواج نوری (الکترومغناطیس) به رهیافتی نیاز داریم که در آن فقط حرکت نسبی بین چشمه و ناظر دخیل باشد و تفاوتی بین حرکت چشمه و حرکت ناظر قائل نشود.

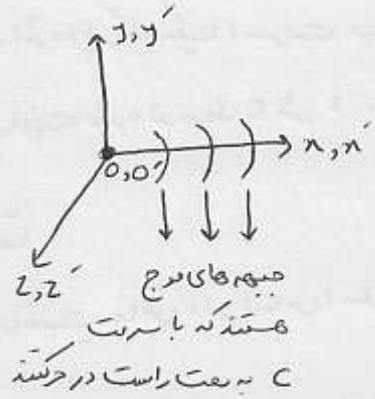
((این درحالی است که اثر دوپلر کلاسیک مربوط به حرکت چشمه یا اثر دوپلر کلاسیک مربوط به حرکت ناظر متفاوت است.))

یک چشمه موج را درنظر بگیرید که در چارچوب مرجع S ساکن است.

چارچوب مرجع S' نسبت به S در امتداد محور مشترک x و x' با سرعت ثابت v درحال حرکت است.

چشمه موج را در چارچوب S در مکان مبدأ در حال سکون قرار می دهیم.

در لحظه‌ای که دو مبدأ O و O' (به طور لحظه‌ای) بر یکدیگر منطبق شده اند،
امواج نوری توسط چشمه گسیل می‌شود.
(S' نسبت به S به سمت راست در حرکت است)

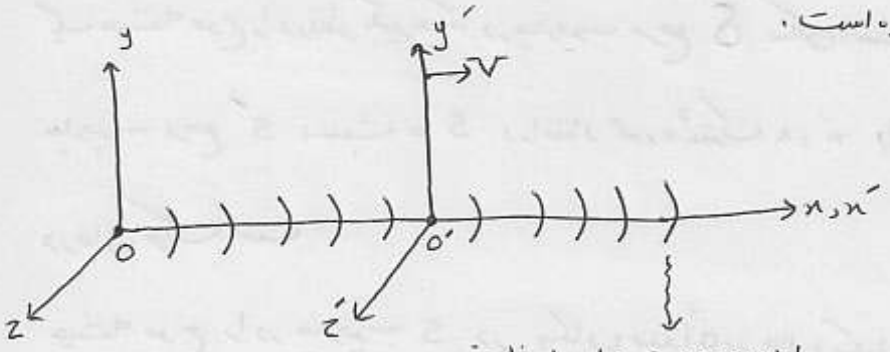


فرض کنید که ناظر O مشاهده می‌کند که چشمه نور، N جبهه موج با بسامد ν گسیل می‌کند. به نظر O، این N موج در بازه زمانی $\Delta t_0 = \frac{N}{\nu}$ گسیل می‌شود.

به عبارت دیگر، از دید O در چارچوب S، N جبهه موج در فاصله مکانی $c\Delta t_0$ قرار دارند. درنتیجه،

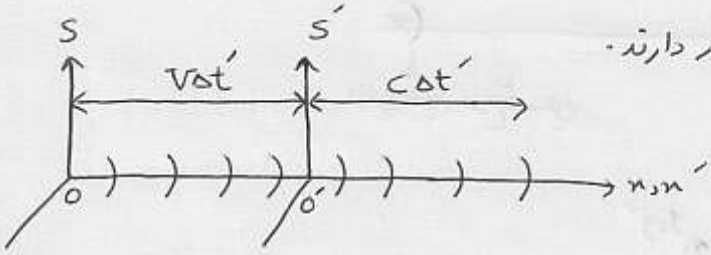
$$\lambda = \frac{c\Delta t_0}{N}$$

در لحظه بعدی، چارچوب S' که در حال حرکت یکنواخت نسبت به S می‌باشد دیگر با چارچوب S هم مبدأ نمی‌باشد. O' نسبت به O به سمت راست جابجا شده است.



براساس شکل اخیر، از دید S' ، N جبهه موج در فاصله

$V\Delta t' + C\Delta t'$ قرار دارند.



درنتیجه از دید O' در چارچوب S' داریم

$$\lambda' = \frac{C\Delta t' + V\Delta t'}{N}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\frac{C}{\nu}}{\frac{C}{\nu'}} = \frac{C\Delta t_0}{(C+V)\Delta t'} = \frac{C\Delta t_0}{(C+V)\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}} =$$

$$= \frac{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{C+V} = \frac{C\sqrt{(1-\frac{V}{C})(1+\frac{V}{C})}}{C(1+\frac{V}{C})} = \sqrt{\frac{1-\frac{V}{C}}{1+\frac{V}{C}}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{C-V}{C+V}}$$

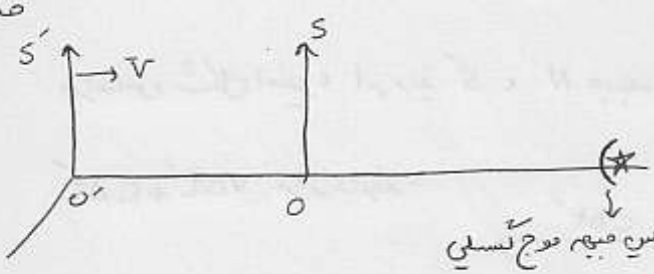
اثر دوپلر نسبیتی در دو منفیت دور شدن چشمه و ناظر نسبت به هم

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{C-V}{C+V}} = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{V}{C}}{1+\frac{V}{C}}}$$

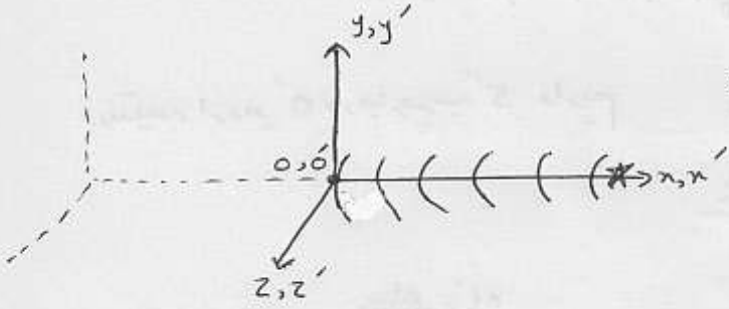
در دو منفیت نزدیک شدن چشمه و ناظر نسبت به هم می توان ثابت کرد:

اثر دوپلر نسبیتی در دو منفیت نزدیک شدن چشمه و ناظر نسبت به هم

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{C+V}{C-V}} = \nu\sqrt{\frac{1+\frac{V}{C}}{1-\frac{V}{C}}}$$



در زمان کروی اولین جبهه نوری



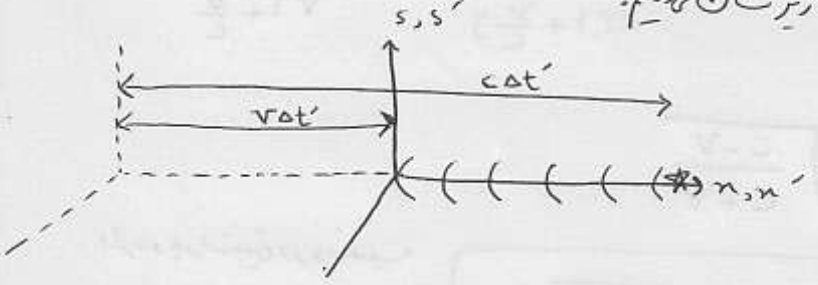
در زمان کروی N امین جبهه نوری

از دید O در چارچوب S ، N جبهه موج در فاصله $c\Delta t_0$ قرار دارد.

$$\lambda = \frac{c\Delta t_0}{N}$$

از دید O' در چارچوب S' ، N جبهه موج در فاصله $c\Delta t' - v\Delta t'$ قرار دارد

حواصل را در شکل زیر نشان میدهیم:



$$\lambda' = \frac{c\Delta t' - v\Delta t'}{N}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

مثال) با چه سرعتی باید اتومبیل خود را به سمت چراغ راهنمایی براند تا چراغ قرمز را به رنگ سبز مشاهده کند؟

$\lambda_{\text{نور سبز}} = ۵۴۰۰\ A^\circ$ ، $\lambda_{\text{نور قرمز}} = ۶۳۰۰\ A^\circ$

در وضعیت نزدیک شدن چشمه و ناظر هستیم:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$\lambda_0 = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \longrightarrow \frac{۶۳۰۰}{۵۴۰۰} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \longrightarrow$$

$$v = ۴,۵۹ \times ۱۰^{۷}\ \frac{m}{s}$$