

دانشگاه مازندران
دانشکده فنی و مهندسی - گروه عمران - گرایش مکانیک
خاک و پی

موضوع درس:

دینامیک خاک (Soil Dynamics)

مدرس: علی عسگری (Ali Asgari)

نیمسال دوم تحصیلی ۹۴-۹۵

دینامیک خاک (Soil Dynamics) فصل سوم



امواج در محیط های ارتجاعی پیوسته

مقدمه: موضوع انتشار امواج در یک محیط ارتجاعی در مطالعات مهندسی و ژئوتکنیک از اهمیت خاص برخوردار است و سرعت موج بستگی به خواص ارتجاعی محیط دارد که موج در آن منتشر می‌شود. در حالی که اجزاء سازه‌ای به سادگی قابل ایده‌آل‌سازی و تجزیه به یک سری اجسام مجزا و مشخص می‌باشند. مصالح زمین‌شناسی این گونه نبوده و باعث می‌شود که دینامیک خاک متمایز از علوم مربوط به دیگر مصالح مهندسی گردد و با مصالح زمین‌شناسی باید به عنوان محیط‌های پیوسته برخورد گردد و پاسخ آن‌ها در برابر تحریک دینامیکی، باید در قالب پدیده انتشار امواج در محیط‌های ارتجاعی بررسی گردد.

هنگامی که بار دینامیکی به طور ناگهانی بر نقطه‌ای از جسم وارد می‌شود تمامی جسم در آن واحد تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد آن قسمت از جسم که به منبع نیرو نزدیک‌تر است زودتر و ابتدا متأثر شده و تغییر شکل‌های ایجاد شده به علت به هم خوردگی و ارتعاش و اغتشاش جسم به شکل امواج تنش در سایر نقاط جسم منتشر می‌شود. تغییر شکل جسم بر اثر نیرو تدریجاً از طریق امواج تنش در سراسر جسم گسترش می‌یابد.

مقدمه و کلیات

تئوری ارتعاشات

امواج در محیط های ...

خصوصیات دینامیکی ...

ارتعاشات شالوده و بی

ظرفیت باربری دینامیکی

پاسخ لرزه ای زمین

فشار لرزه ای جانبی خاک

تراکم دینامیکی ...

روانگرایی

ماشین مرتعش بر روی شمع

پایداری لرزه ای شیروانی

3

امواج در محیط های ارتجاعی پیوسته

بهترین مثال در این مورد امواج لرزه‌ای ناشی از یک زمین لرزه است که از کانون زمین لرزه و از عمق زمین به طرف سطح زمین حرکت می‌کنند پدیده‌های مرتبط بر امواج که در فیزیک مطالعه گردیده‌اند در مورد این امواج لرزه‌ای نیز صادق می‌باشند پدیده‌هایی هم‌چون انعکاس و انکسار که باعث می‌شوند موج لرزه‌ای از کانون زمین لرزه تا سطح زمین تغییر نماید.

انواع محیط‌های ارتجاعی در مسائل مختلف

- ارتعاش امواج در محیط یک بعدی الاستیک و محدود
- ارتعاش امواج در محیط نامحدود
- ارتعاش امواج در محیط نیمه محدود
- لایه‌ای

قبل از بررسی انتشار امواج در محیط الاستیک ضروری است که روابط تنش- کرنش بررسی شود.

4

انواع امواج

- طولی P

- عرضی S

- سطحی R

R, S, P امواج پی ماشین آلات

S, P امواج زلزله های عمیق

R, S, P امواج ژئوفیزیکی توسط دستگاه

امواج صوتی طولی

امواج پیچشی عرضی

محیط محدود تیر دوسر گیردار

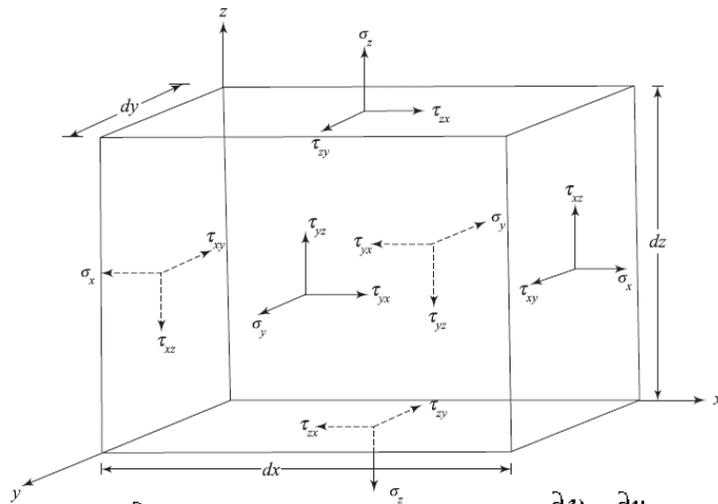
محیط نامحدود کمتر دیده می شود میله ی طولیل محدود نشده

Half Space محیط نیمه محدود محیط نیمه فضا

محیط لایه ای بسترهای ژئوتکنیکی

5

تنش- کرنش:



$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

کرنش ها:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma'_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma'_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\bar{\omega}_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\bar{\omega}_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

6

قانون هوک:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma'_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\tau_{yz} = G\gamma'_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma'_{zx}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\sigma_x = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\varepsilon_x$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$\sigma_y = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\varepsilon_y$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\sigma_z = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\varepsilon_z$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

7

مطالعه انتشار یک بعدی امواج در محیط‌های نامحدود از طریق میله طویل درک و استنباط و مطالعه انتشار امواج در محیط‌های دوبعدی و سه بعدی (حالات کلی) نسبتاً مشکل بوده ولی می‌توان از طریق مطالعه یک بعدی امواج در یک محیط ایده‌آل و نامحسوس آن را ساده‌تر نمود و بهترین راه مطالعه انتشار امواج در میله یا استوانه توپر طویل می‌باشد.

- انتشار امواج یک بعدی در یک میله طویل

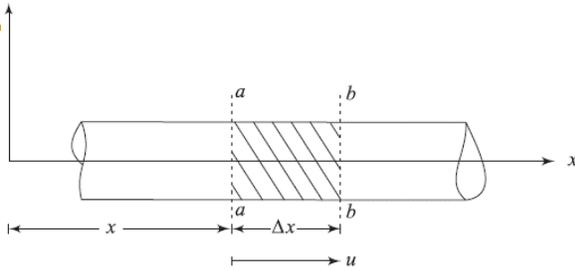
سه نوع حرکت موج مستقل در میله امکان پذیر است: طولی، پیچشی و خمشی.
۲ نوع اول موج منجر به پیدایش معادلات نمونه موج برای موج‌های طولی و عرضی می‌گردد و برای نوع سوم در دینامیک خاک جایی وجود ندارد.

8

انتشار امواج طولی

مشخصات مکانیکی میله

E, γ : معلوم



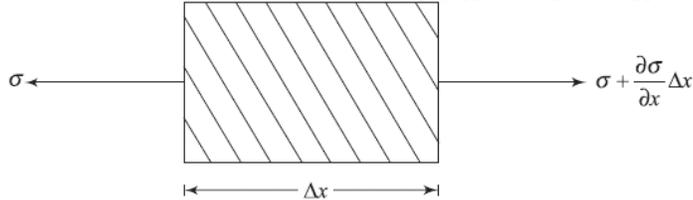
ارتعاش آزاد این میله تحت تأثیر امواج طولی مطالعه می‌شود اگر میله امکان کرنش شعاعی نداشته باشد در آن صورت جابه‌جایی ذرات به وسیله یک موج طولی تولید می‌شود.

قبل از نوشتن معادله تعادل نیروهای دینامیکی فرض مهم این است که:

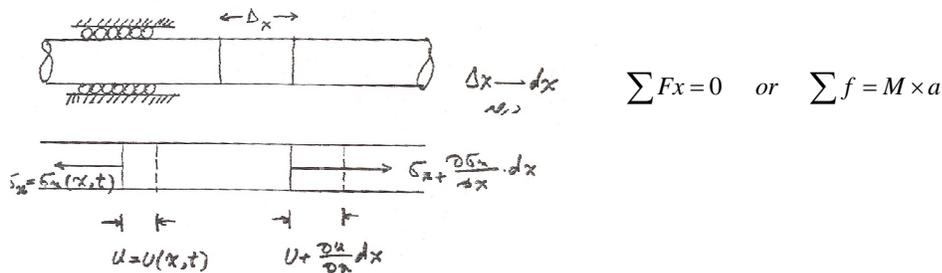
۱- صفحات عرضی (عمود بر محور میله) پس از جابه‌جایی به صورت صفحه باقی

می‌ماند.

۲- تنش روی صفحات به صورت یکنواخت توزیع می‌شود.



9



$$-\sigma_x \cdot A + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \cdot A = \frac{A \cdot dx \cdot \gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot E \right) = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

نکته قابل توجه این که چون میله را از طرفین مهار شده فرض نمودیم، در این صورت:

$$\sigma = M \cdot \varepsilon, \quad M = \left\{ \frac{(1-\nu)}{[(1+\nu)(1-2\nu)]} \right\} E$$

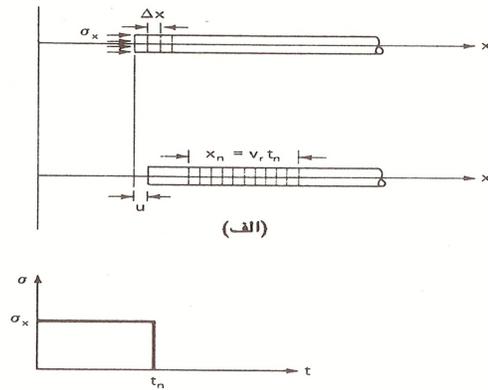
$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{سرعت انتشار موج طولی طرفین مهار نشده} \quad V_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \quad \text{طرفین مهار شده}$$

نکته مهم

سرعت انتشار موج در داخل میله V_p, V_c با سرعت ذرات میله تحت منطقه تنش یکسان نیست. سرعت انتشار موج سرعت موج تنش نیز می باشد.

سرعت امواج و انتشار آن‌ها با افزایش سختی و کاهش دانسیته مصالح افزایش می‌یابد.

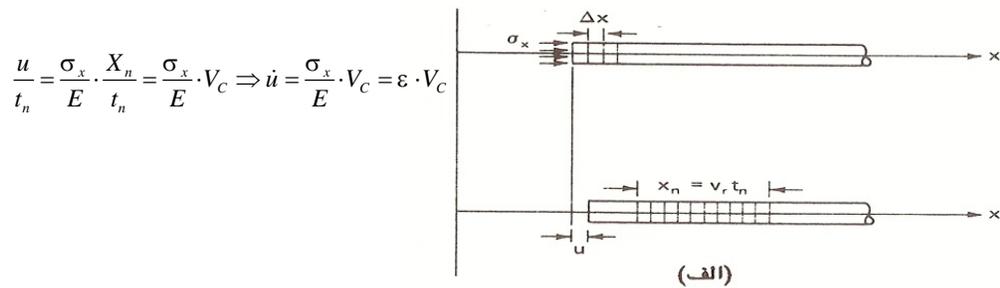
اگر به قسمت انتهایی میله شکل روبرو تنش یکنواخت و نوسانی σ_x با مدت زمان t_n وارد شود فقط قسمت کوچکی نزدیک به این مقطع تحت تنش فشاری واقع می‌گردد و این تنش همچنان که زمان می‌گذرد به سایر نقاط میله منتقل می‌شود که سرعت این انتقال همان V_p یا V_c خواهد بود.



در خلال زمان Δt تنش فشاری به میزان $\Delta x = V_c \cdot \Delta t$ پیشروی میکند اما در هر لحظه دیگر زمان مانند تنش فشاری در طول قطعه‌های از میله تعادل $X_A = V_c t_n$ پیش خواهد رفت و میزان کوتاهشدگی طول میله در اثر اعمال این تنش عبارت است از:

$$u = \varepsilon \cdot X_n = \frac{\sigma_x}{E} X_n = \frac{\sigma_x}{E} \cdot V_c \cdot t_n$$

و در حقیقت اگر سرعت تغییر شکل در میله را بخواهیم:



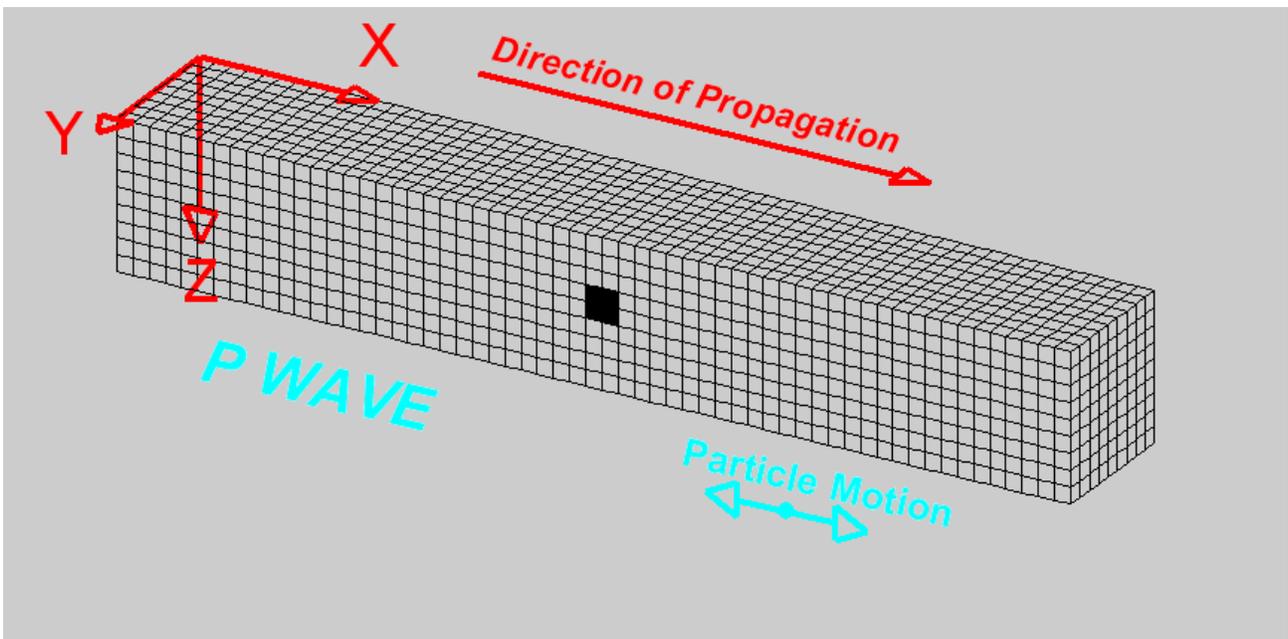
$$\frac{u}{t_n} = \frac{\sigma_x}{E} \cdot \frac{X_n}{t_n} = \frac{\sigma_x}{E} \cdot V_c \Rightarrow \dot{u} = \frac{\sigma_x}{E} \cdot V_c = \varepsilon \cdot V_c$$

رابطه زیر از این نظر مهم است که ارتباط بین سرعت حرکت ذرات و سرعت نشر موج طولی یا موج تنش را نشان می‌دهد.

نکته قابل توجه دیگر این که سرعت نشر موج و سرعت حرکت ذره هنگامی که تنش وارده فشاری باشد هر دو هم‌جهت و هنگامی که تنش وارده کششی باشد در جهت مخالف یکدیگر هستند. نکته قابل توجه دیگر این که سرعت جابه‌جایی ذرات وابسته به شدت تنش یا تغییر شکل نسبی بوده در حالی که سرعت نشر موج فقط تابعی از خواص مصالح می‌باشد.

$$\dot{u} = \frac{\sigma_x}{E} \cdot V_c = \varepsilon \cdot V_c$$

انیمیشن فشاری یا طولی p-wave



مثال

سرعت V_p را برای فولاد، لاستیک سخت و آب حساب کنید.

نام مصالح	G_s	مدول الاستیته مهار شده $Psi(M)$
فولاد	7.85	40.4×10^6
لاستیک	1.2	167×10^6
آب	1.0	0.34×10^6

$$\text{فولاد} : V_p = \sqrt{\frac{40.4 \times 10^6 \times 144 \times 32.2}{7.85 \times 62.4}} = 19556 \text{ ft/sec}$$

$$\text{لاستیک} : V_p = \sqrt{\frac{167 \times 10^6 \times 144 \times 32.2}{1.2 \times 62.4}} = 101691 \text{ ft/sec}$$

$$\text{آب} : V_p = \sqrt{\frac{0.34 \times 10^6 \times 144 \times 32.2}{1.0 \times 62.4}} = 5026 \text{ ft/sec}$$

15

ارتعاش پیچشی میله‌های نامحدود

در مسئله‌ی ارتعاش پیچشی میله‌ها، می‌توان امواج عرضی و انتشار آن‌ها و رابطه سرعت امواج عرضی در مصالح مختلف را بررسی نمود. از آنجایی که پیچش همیشه همراه امواج برشی عرضی در مصالح است یک پیچش دینامیکی می‌تواند منجر به انتشار امواج عرضی در میله گردد.

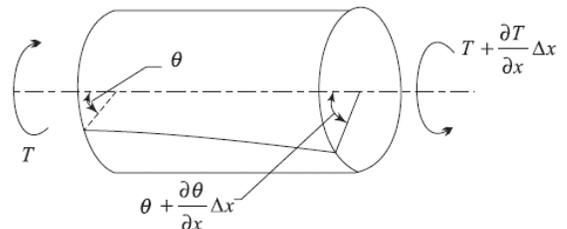
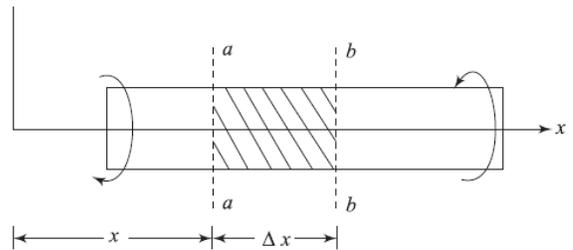
$$mr^2 \ddot{\theta} = -T + \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \right] = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x$$

$$T = mr^2 \ddot{\theta} = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{\rho \cdot V \cdot r^2}{2} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot V^2 \cdot r^2}{2} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \Delta x$$

$$= \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \Delta x = \rho \cdot J \cdot \Delta x \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \text{ or } T = \rho \cdot J \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$T = J \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(J \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = J \cdot G \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\rho \cdot J \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = J \cdot G \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$



16

مقایسه ارتعاش طولی و پیچشی میله‌های نامحدود

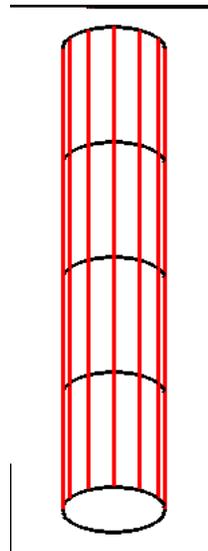
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{or} \quad V_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

فرم کلی جواب دالامبر:

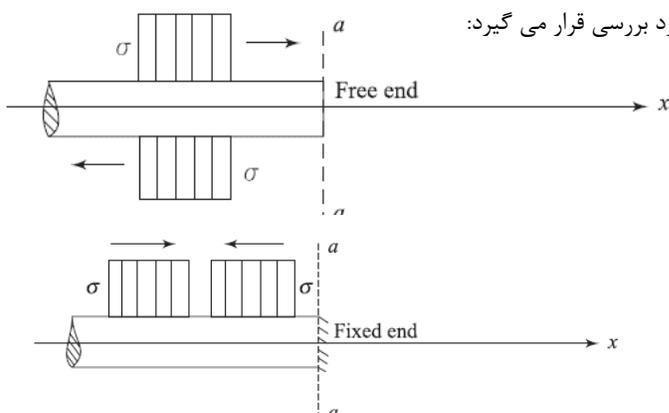
$$u = F(V_c \cdot t + x) + G(V_c \cdot t - x)$$

$$\theta = F(V_s \cdot t + x) + G(V_s \cdot t - x)$$



انعکاس و شرایط تکیه گاهی در میله‌های محدود

میله‌هایی که تا به حال بررسی گردیدند و معادلات موج برای آن‌ها نوشته شده با فرض غیرواقعی با طول بی‌نهایت در نظر گرفته شدند و جواب معادلات دیفرانسیل اشاره شده در قبل نیز برای این شرایط صدق خواهد نمود. در حالی که در واقعیت میله‌ها با طول نامحدود وجود ندارند و در نقطه‌ای به انتها می‌رسند.

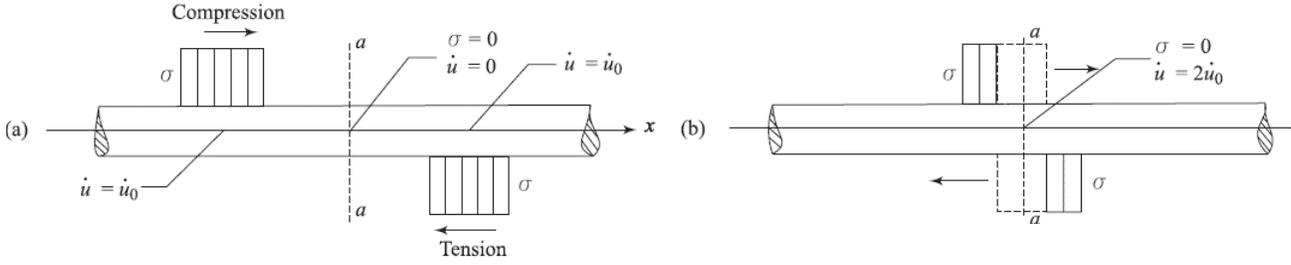


در اینجا دو شرایط تکیه گاهی مورد بررسی قرار می‌گیرد:

۱- انتهای آزاد

۲- انتهای گیردار

۱- انتهای آزاد



حرکت یک موج فشاری در جهت x^+ و یک موج مشابه کششی در جهت x^- هنوز به $a-a$ نرسیده‌اند:

$$\sigma = 0, \quad \ddot{u} = 0$$

$$\sigma = 0, \quad \dot{u} = 2\dot{u}_0$$

موجهای فوق به نقطه‌ی $a-a$ رسیده‌اند:

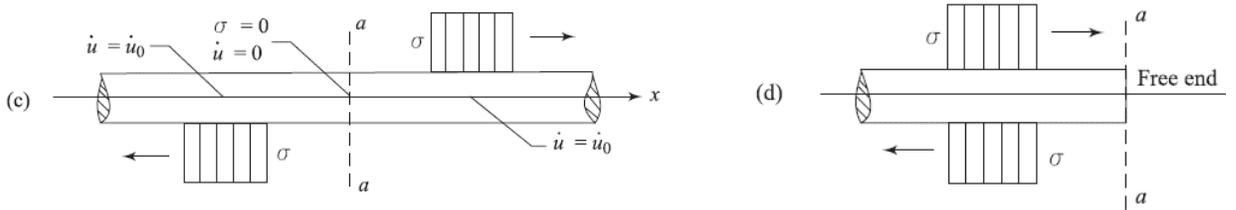
$$\dot{u} = \varepsilon \cdot V_c$$

موجهای فوق در حال ترک $a-a$ هستند و ماهیت آنها عوض میشود: کششی ← فشاری:

$$\sigma = 0, \quad \dot{u} = 0$$

حذف نیمی از میله و ایجاد انتهای آزاد و اضافه نمودن یک موج انعکاسی جهت ارضاء شرایط مرزی.

۱- انتهای آزاد



حرکت یک موج فشاری در جهت x^+ و یک موج مشابه کششی در جهت x^- هنوز به $a-a$ نرسیده‌اند:

$$\sigma = 0, \quad \ddot{u} = 0$$

$$\sigma = 0, \quad \dot{u} = 2\dot{u}_0$$

موجهای فوق به نقطه‌ی $a-a$ رسیده‌اند:

$$\dot{u} = \varepsilon \cdot V_c$$

موجهای فوق در حال ترک $a-a$ هستند و ماهیت آنها عوض میشود: کششی ← فشاری:

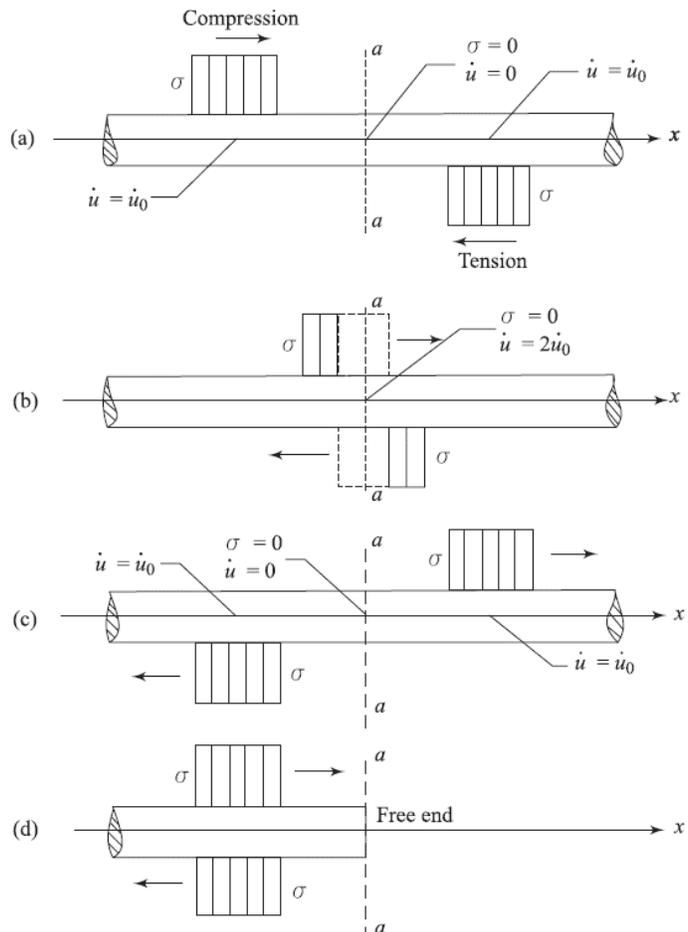
$$\sigma = 0, \quad \dot{u} = 0$$

حذف نیمی از میله و ایجاد انتهای آزاد و اضافه نمودن یک موج انعکاسی جهت ارضاء شرایط مرزی.

۱- انتهای آزاد

شرایط دائمی $\sigma=0$ در انتهای آزاد یک میله برقرار است (اجتناب‌ناپذیر) حتی در هنگام رسیدن موج طولی ارتعاشی به انتهای آزاد لذا جهت ارضاء این شرایط باید یک موج انعکاسی با ماهیت خلاف موج در حال حرکت به انتهای آزاد میله به آن اضافه نمود تا یک انعکاس را به وجود بیاورد در این حال در هنگام رسیدن موج به انتهای آزاد میله سرعت ذرات مضاعف (دو برابر) خواهد شد.

بنابراین می‌توان گفت که در انتهای آزاد یک میله موج فشاری با همان شکل و مقدار به صورت یک موج کششی به عقب منعکس می‌گردد در حالت مشابه یک موج کششی در انتهای آزاد میله به صورت یک موج فشاری به عقب منعکس می‌شود.

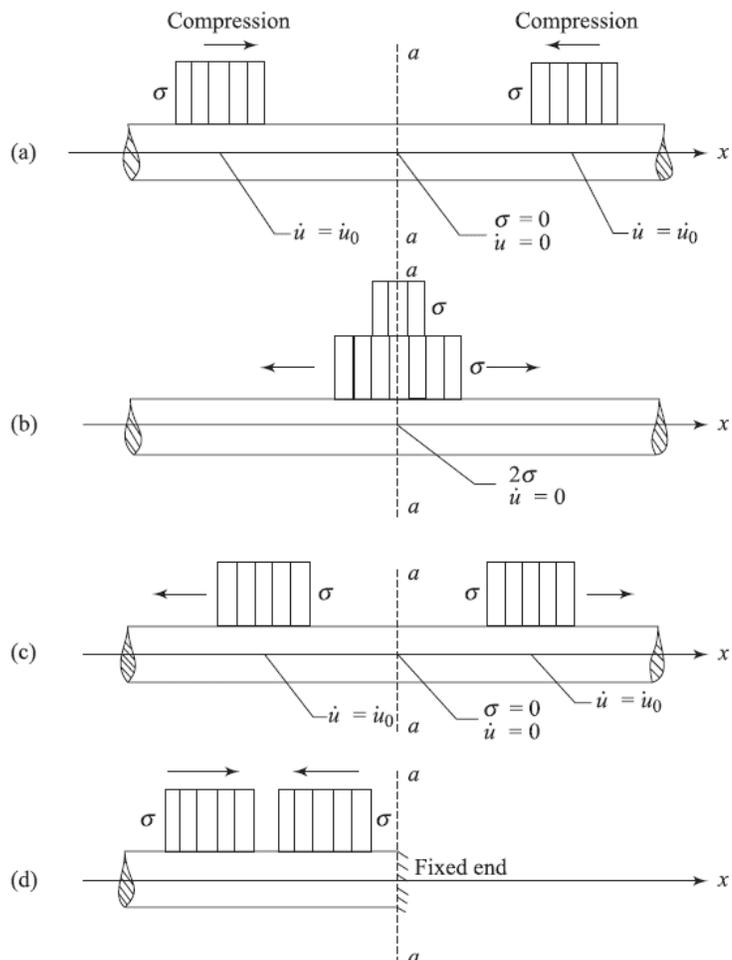


21

۲- انتهای گیردار

در شکل روبرو یک موج فشاری پله‌ای در جهت x و دیگری در خلاف جهت x به صورت مشابه به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. در مقطع وسط همواره سرعت جابه‌جایی ذرات صفر می‌باشد.

تلاقی دو موج تنش در $a-a$ باعث می‌شود که مقدار تنش مضاعف گردد ولی سرعت ذرات همچنان صفر باشد این وضعیت مشابه وضعیتی است که انتهای میله گیرداری را بررسی می‌کنیم در انتهای گیردار یک میله با طول محدود یک موج فشاری (یا کششی) به همان صورت فشاری (یا کششی) به عقب منعکس می‌شود و تنش حاصله در مقطع گیردار به هنگام رسیدن به آن مضاعف می‌شود.



22

تحلیل معادله ارتعاش برای میله‌های محدود

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$u(x,t) = U(x) \cdot F(t) \quad U(x) \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} F(t) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{F(t)} \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -\omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{F}(t) + \omega_n^2 F(t) = 0 \\ U''(x) + \frac{\rho}{E} \omega_n^2 U(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t \\ U(x) = B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \end{cases}$$

23

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

اعمال شرایط تکیه گاهی یا همان شرایط مرزی

حال با داشتن معادله اخیر شرایط انتهایی را در میله‌های مرتعش را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

- ۱- میله با دو انتهای آزاد
- ۲- میله با شرایط انتهایی گیردار- آزاد
- ۳- میله با شرایط انتهایی گیردار- گیردار

24

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

۱- میله با دو انتهای آزاد

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

همان طور که قبلا گفته شد با فرض طول محدود میله برابر L تنش و کرنش (مشتق جابجایی نسبت به x) در هر دو انتها صفر هستند در نتیجه داریم:

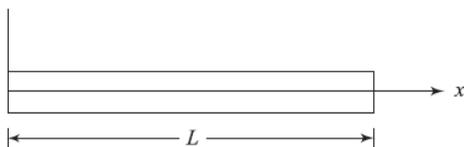
$$\begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases} \frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{B_1 \cdot \omega_n}{V_c} \cos\left(\frac{\omega_n \cdot x}{V_c}\right) - \frac{B_2 \cdot \omega_n}{V_c} \sin\left(\frac{\omega_n \cdot x}{V_c}\right) = 0$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{B_1 \cdot \omega_n}{V_c} = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$x=L \Rightarrow -\left(\frac{B_2 \cdot \omega_n}{V_c}\right) \sin \frac{\omega_n \cdot L}{v_c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} B_2 \neq 0 \\ \frac{\omega_n \cdot L}{V_c} = n\pi \end{cases}$$

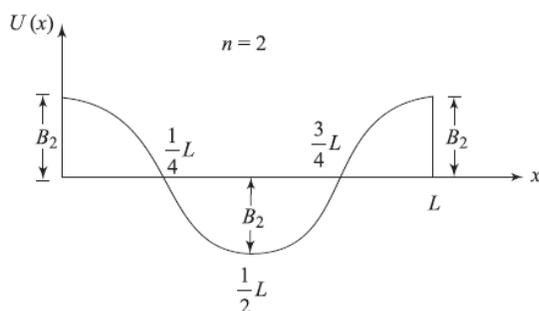
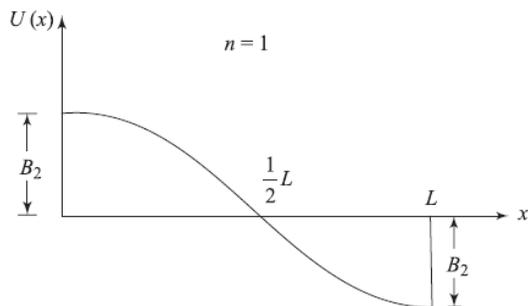
$$\text{or } \omega_n = \frac{n\pi V_c}{L}, n=1,2,3,\dots, V_c = \frac{\omega_n \cdot L}{n\pi} \Rightarrow U(x) = B_2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

25



۱- میله با دو انتهای آزاد

$$U(x) = B_2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{۲- میله با شرایط انتهایی گیردار- آزاد}$$

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

برای این حالت محاسبات مشابه شرایط انتهایی آزاد- آزاد انجام می شود جابجایی در انتهای گیردار صفر است و کرنش در انتهای آزاد صفر است. بنابراین داریم:

$$x=0 \Rightarrow U(x)=0 \Rightarrow B_2=0$$

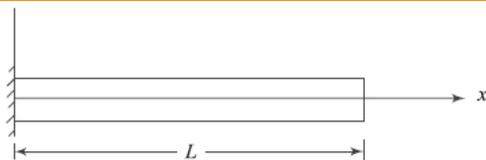
$$x=L \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{B_1 \cdot \omega_n}{V_c} \cos\left(\frac{\omega_n \cdot L}{V_c}\right) = 0$$

$$\text{or } \frac{\omega_n \cdot L}{V_c} = (2n-1) \frac{\pi}{2}, n=1, 2, 3, \dots$$

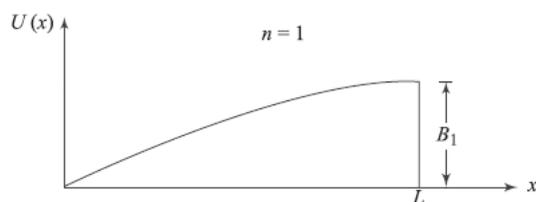
$$\text{or } \omega_n = \frac{1}{2}(2n-1) \frac{\pi V_c}{L}$$

$$U(x) = B_1 \sin\left(\left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)$$

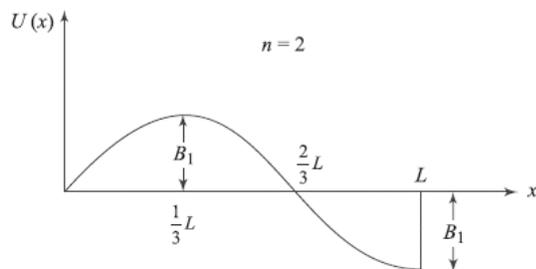
27



۲- میله با شرایط انتهایی گیردار- آزاد



$$U(x) = B_1 \sin\left(\left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)$$



28

۳- میله با شرایط انتهایی گیردار-گیردار $v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

شرایط مرزی را می‌توان برای این وضعیت به صورت زیر در نظر گرفت:

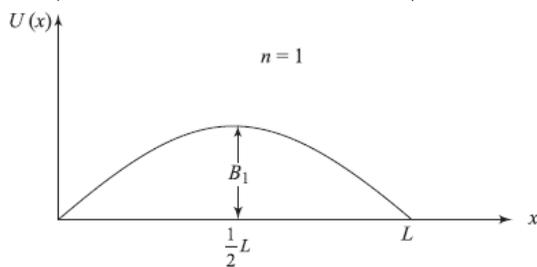
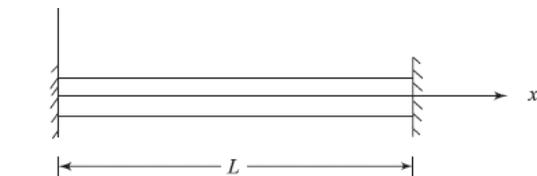
$$\begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x=0)=0 \\ U(x=L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_2=0 \\ B_1 \sin\left(\frac{\omega_n \cdot L}{V_c}\right) = 0, \text{---} B_1 \neq 0 \rightarrow \frac{\omega_n \cdot L}{V_c} = n\pi \end{cases}$$

$$\text{if } n=1,2,3,\dots \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi V_c}{L} \text{ or } V_c = \frac{\omega_n \cdot L}{n\pi}$$

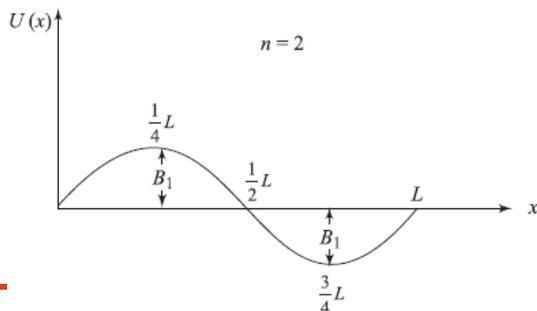
$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

29

۳- میله با شرایط انتهایی گیردار-گیردار



$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



مقایسه انواع شرایط تکیه گاهی:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

دو انتهای با شرایط آزاد

$$U(x) = B_2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

شرایط انتهایی گیردار- آزاد

$$U(x) = B_1 \sin\left(\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right)$$

شرایط انتهایی گیردار-گیردار

$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

توجه شود که ضرایب A_1 و A_2 از شرایط اولیه تعیین می شوند.

مقایسه ارتعاش طولی و پیچشی میله‌های نامحدود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{or} \quad V_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

فرم کلی جواب دالامبر:

$$u = F(V_c \cdot t + x) + G(V_c \cdot t - x)$$

$$\theta = F(V_s \cdot t + x) + G(V_s \cdot t - x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ارتعاش طولی در میله‌های محدود

$$u(x,t) = F(t) \times U(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

ارتعاش پیچشی در میله‌های محدود

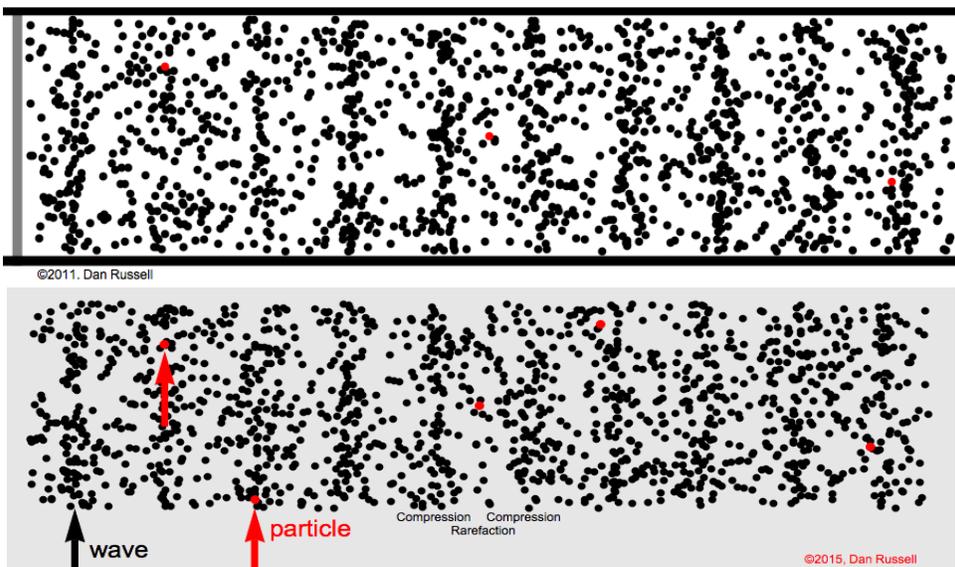
$$\theta(x,t) = F(t) \times \Theta(x) = \{A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t\} \times \left\{ B_1 \sin \frac{\omega_n x}{v_c} + B_2 \cos \frac{\omega_n x}{v_c} \right\}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi v_c}{L} \quad \text{۱- میله با دو انتهای آزاد}$$

$$\omega_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-1)\pi v_s}{L} \quad \text{۲- میله با شرایط انتهایی گیردار-آزاد}$$

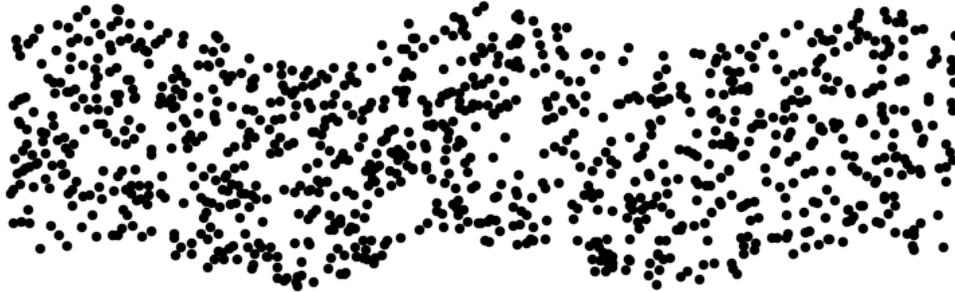
انیمیشن موج فشاری-کششی در محیط

<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>



انیمیشن موج برشی یل عرضی در محیط

<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>



35

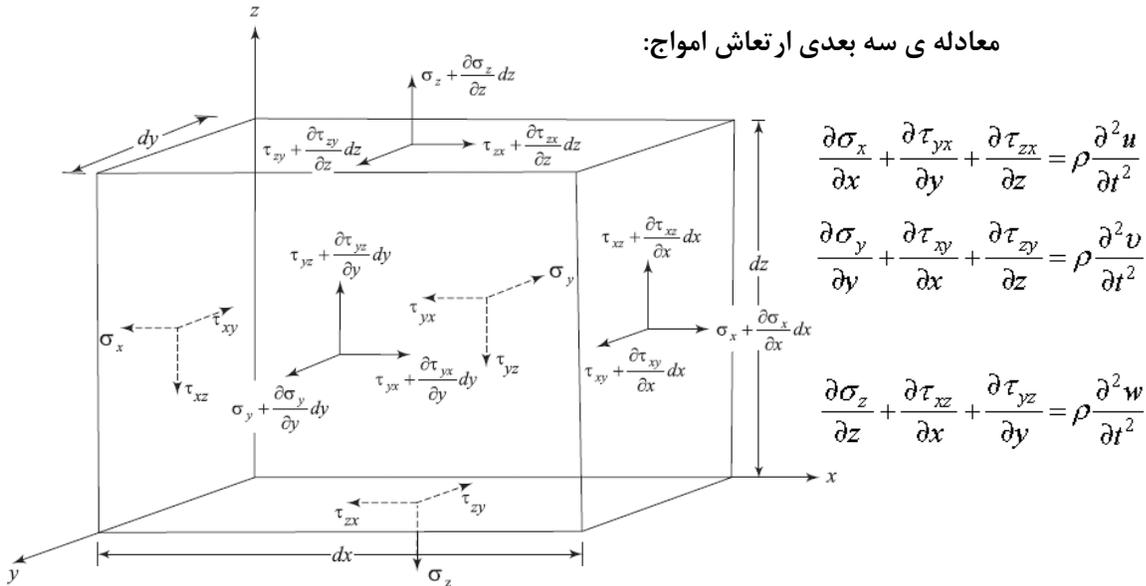
بهترین مثال در این مورد امواج لرزه‌ای ناشی از یک زمین‌لرزه است که از کانون زمین‌لرزه و از عمق زمین به طرف سطح زمین حرکت می‌کنند پدیده‌های مرتبط بر امواج که در فیزیک مطالعه گردیده‌اند در مورد این امواج لرزه‌ای نیز صادق می‌باشند پدیده‌هایی هم‌چون انعکاس و انکسار که باعث می‌شوند موج لرزه‌ای از کانون زمین‌لرزه تا سطح زمین تغییر نماید.

انواع محیط‌های ارتجاعی در مسائل مختلف

- ارتعاش امواج در محیط یک بعدی الاستیک و محدود
- ارتعاش امواج در محیط نامحدود
- ارتعاش امواج در محیط نیمه‌محدود
- لایه‌ای

36

معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج:



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] (dy)(dz) + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] (dx)(dy) + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] (dx)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ and } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma'_{xy} \\ \tau_{yz} &= G \gamma'_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \gamma'_{zx} \end{aligned}$$

معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

۱- فشاری یا طولی p-wave

۲- برشی یا عرضی s-wave

$$\begin{aligned} \gamma'_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma'_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma'_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

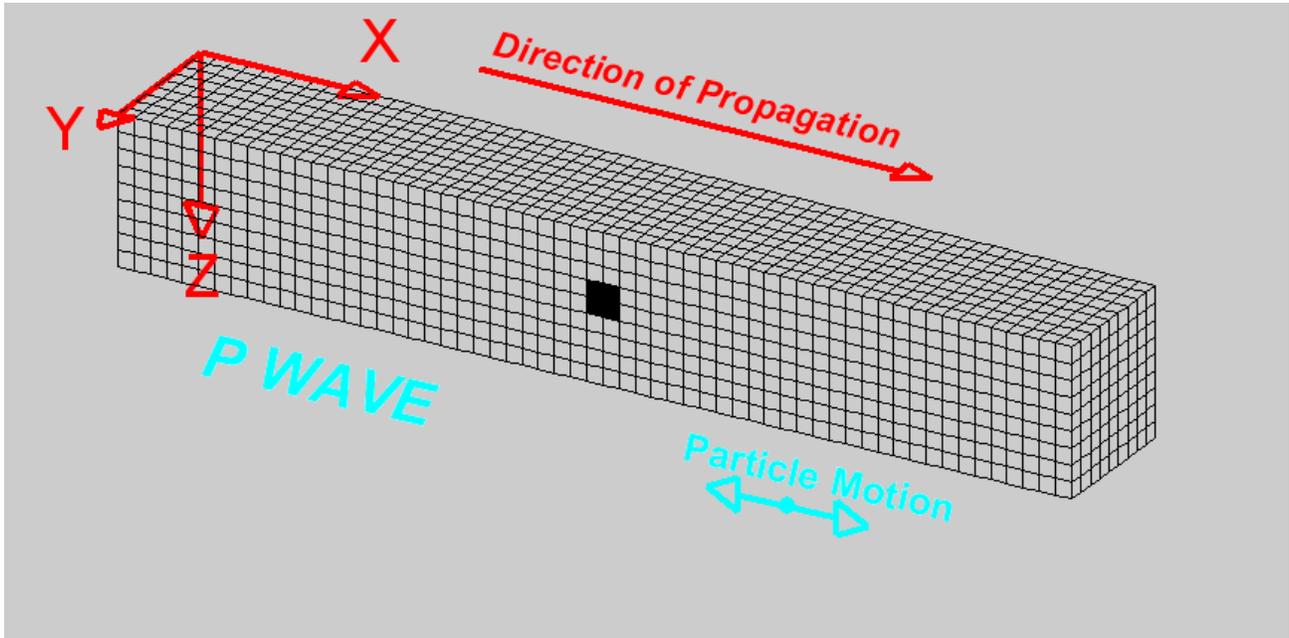
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

از قبل داریم:

انیمیشن فشاری یا طولی p-wave



معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

۱- فشاری یا طولی p-wave

۲- برشی یا عرضی s-wave

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ and } \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \sigma_x = \lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_x, \quad \tau_{xy} = G \gamma'_{xy}, \quad \tau_{zx} = G \gamma'_{zx}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G \gamma'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \gamma'_{zx}) \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma'_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \bar{\epsilon} + 2G \epsilon_x) + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x}$$

معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

۱- فشاری یا طولی p-wave

۲- برشی یا عرضی s-wave

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

در جهت های دیگر

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

۱- فشاری یا طولی و یا اولیه p-wave

۲- برشی یا عرضی و یا ثانویه s-wave

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

با جمع کردن سه رابطه فوق داریم:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial z^2} \right) + G \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

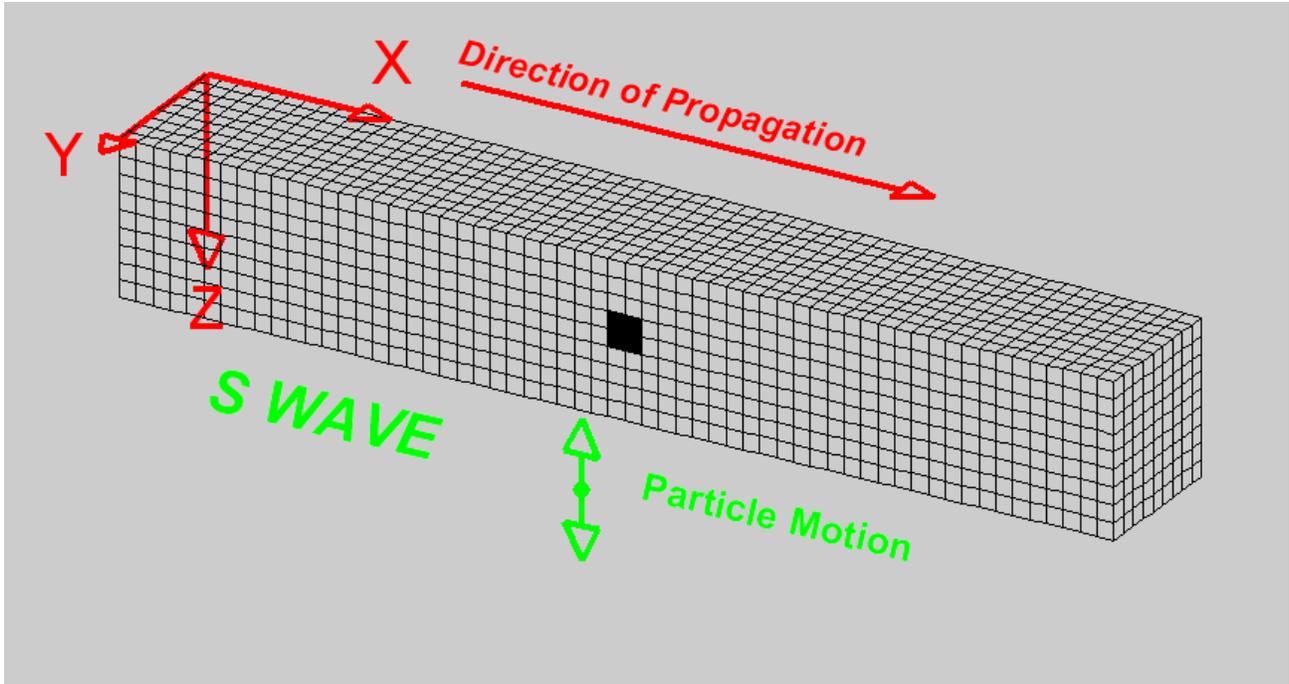
$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = (\lambda + G) (\nabla^2 \bar{\epsilon}) + G (\nabla^2 \bar{\epsilon}) = (\lambda + 2G) \nabla^2 \bar{\epsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \bar{\epsilon} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\epsilon}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

سرعت اتساعی یا سرعت موج اولیه:

انیمیشن موج برشی یا عرضی و یا ثانویه s-wave



معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

۱- فشاری یا طولی و یا اولیه p-wave

۲- برشی یا عرضی و یا ثانویه s-wave

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

با مشتق گیری از رابطه وسطی فوق نسبت به Z و رابطه سمت راست نسبت به Y داریم:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{(\partial y)(\partial z)} + G \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial z} \quad \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{(\partial y)(\partial z)} + G \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y}$$

با کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2 \bar{\omega}_x$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}_x = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad v_s = \sqrt{G/\rho} \quad \text{سرعت موج برشی یا سرعت فرعی:}$$

معادله ی سه بعدی ارتعاش امواج در حالت های خاص:

۱- فشاری یا طولی و یا اولیه p-wave

۲- برشی یا عرضی و یا ثانویه s-wave

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \bar{\epsilon} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\epsilon}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

سرعت اتساعی یا سرعت موج اولیه:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}_x = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_y}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_y$$

$$v_s = \sqrt{G/\rho}$$

سرعت موج برشی یا سرعت فرعی:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_z$$

چند نکته اساسی:

۱- در محیط های سه بعدی دو نوع موج انتشار می یابد که موجی بصورت تنش فشاری -کششی انتشار می یابد (موج p) و دیگری بصورت برشی (موج s). این امواج با سرعتهای مختلف در محیط منتشر می شوند.

۲- سرعت موج طولی p بزرگتر از سرعت موج فشاری در میله یک بعدی و بزرگتر از سرعت موج عرضی و یا ثانویه s-wave

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

$$v_c = \sqrt{E/\rho}$$

$$v_s = \sqrt{G/\rho}$$

سرعت اتساعی یا سرعت موج اولیه:

سرعت موج فشاری

سرعت موج برشی

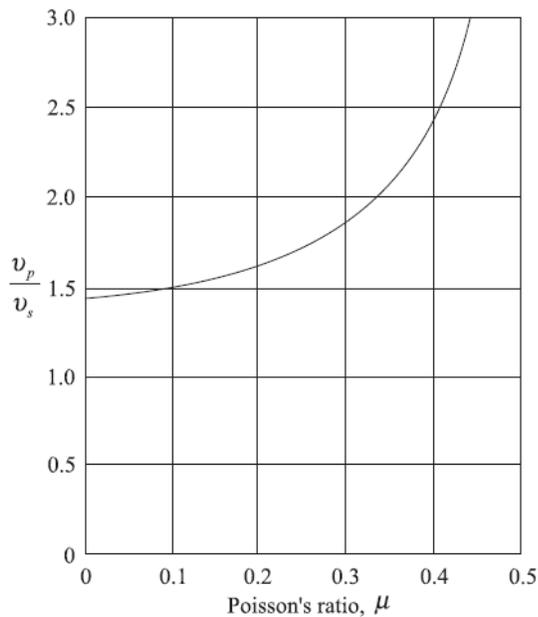
$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - \mu)}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{E(1 - \mu)}{\rho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}$$

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1 - \mu)}{1 - 2\mu}}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \mu)\rho}}$$



چند نکته اساسی:

۱- در محیط های سه بعدی دو نوع موج انتشار می یابد که ک موجی بصورت تنش فشاری -کششی انتشار می یابد (موج p) و دیگری بصورت برشی (موج s). این امواج با سرعتهای مختلف در محیط منتشر می شوند.

۲- سرعت موج طولی p بزرگتر از سرعت موج فشاری در میله یک بعدی و بزرگتر از سرعت موج عرضی و یا ثانویه s-wave

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}$$

چند نکته اساسی:

۱- در محیط های سه بعدی دو نوع موج انتشار می یابد که ک موجی بصورت تنش فشاری -کششی انتشار می یابد (موج p) و دیگری بصورت برشی (موج s). این امواج با سرعتهای مختلف در محیط منتشر می شوند.

۲- سرعت موج طولی p بزرگتر از سرعت موج فشاری در میله یک بعدی و بزرگتر از سرعت موج عرضی و یا ثانویه s-wave

۳- جدول زیر مقادیر مختلفی از سرعت اولیه و ثانویه را در محیط سنگی و خاکی نشان می دهد.

Table 3.1 Typical values of v_p and v_s

Soil type	Compressive wave velocity, v_p (m/s)	Shear wave velocity, v_s (m/s)
Fine sand	300	90 -150
Dense sand	460	230
Gravel	762	180 - 215
Moist clay	1220 - 1370	150
Granite	3960 - 5490	2130 - 3350
Sandstone	1370 - 3960	610 - 2130

چند نکته اساسی:

۱- در محیط های سه بعدی دو نوع موج انتشار می یابد که ک موجی بصورت تنش فشاری - کششی انتشار می یابد (موج p) و دیگری بصورت برشی (موج s). این امواج با سرعت های مختلف در محیط منتشر می شوند.

۲- سرعت موج طولی p بزرگتر از سرعت موج فشاری در میله یک بعدی و بزرگتر از سرعت موج عرضی و یا ثانویه s-wave

۳- جدول زیر مقادیر مختلفی از سرعت اولیه و ثانویه را در محیط سنگی و خاکی نشان می دهد.

۴- مصالح سخت تر دارای مقادیر سرعت اولیه و ثانویه بیشتری هستند.

چند نکته اساسی:

۱- در محیط های سه بعدی دو نوع موج انتشار می یابد که ک موجی بصورت تنش فشاری - کششی انتشار می یابد (موج p) و دیگری بصورت برشی (موج s). این امواج با سرعت های مختلف در محیط منتشر می شوند.

۲- سرعت موج طولی p بزرگتر از سرعت موج فشاری در میله یک بعدی و بزرگتر از سرعت موج عرضی و یا ثانویه s-wave

۳- جدول زیر مقادیر مختلفی از سرعت اولیه و ثانویه را در محیط سنگی و خاکی نشان می دهد.

۴- مصالح سخت تر دارای مقادیر سرعت اولیه و ثانویه بیشتری هستند.

۵- اگر ضریب پواسون ۰.۵ باشد آنگاه سرعت موج فشاری بی نهایت می شود.

$$v_p = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

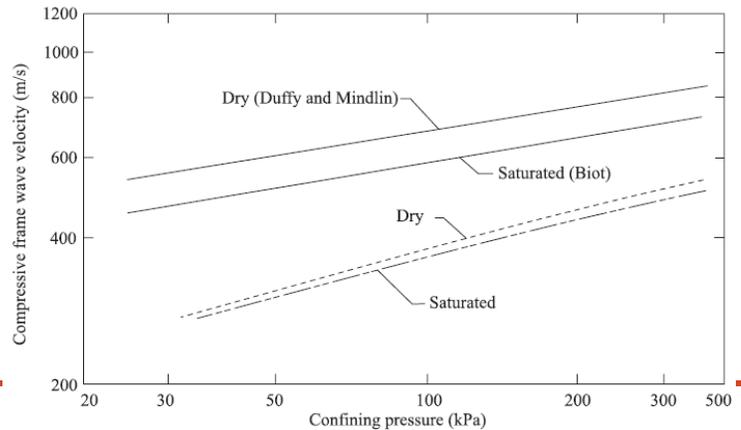
چند نکته اساسی:

۶- امواج در محیط های خاک اشباع از دو طریق دانه های خاک و آب داخل حفرات انتشار می یابد. تحقیقات کاملی توسط بایوت در سال ۱۹۵۶ در این زمینه انجام گرفت. در آن مطالعه نشان میدهد که دو موج فشاری و یک نوع موج برشی در محیط اشباع وجود دارد. برخی پژوهشگران اشاره کردند که یک موج فشاری از طریق سیال انتقال می یابد و موج دیگر از طریق بخش جامد خاک. مسلماً انتشار این دو موج بطور مجزا نیست و حرکت بصورت همبسته است. در مورد انتشار موج برشی فقط بسته به مشخصات دانه های خاک دارد و مرتبط به سیال بین حفرات نیست.

مقایسه سرعت موج فشاری در خاک ماسه ای اوتواوا به صورت خشک و اشباع در دو حالت تئوری و آزمایشگاهی Hardin and Richart, 1963

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

حالت تئوری:

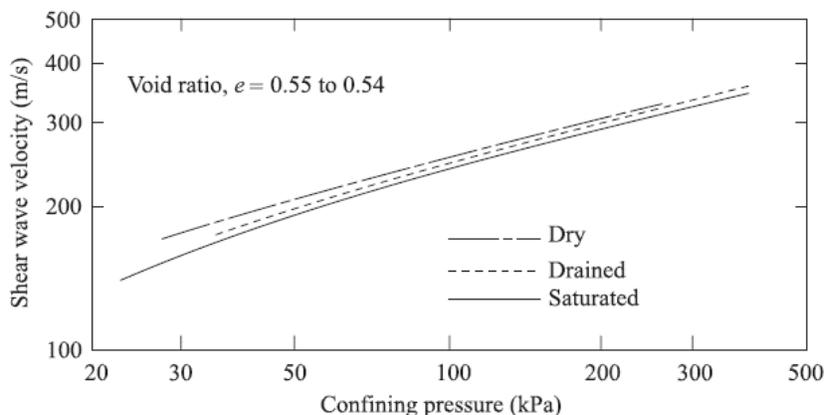


$$v_w = \sqrt{\frac{B_w}{\rho_w}}$$

سرعت موج فشاری در آب:

که در آن B_w مدول بالک آب است. معمولاً مقدار سرعت موج فشاری در آب برابر با ۱۴۶۳ متر برثانیه است.

اثر آب بر روی سرعت موج برشی:

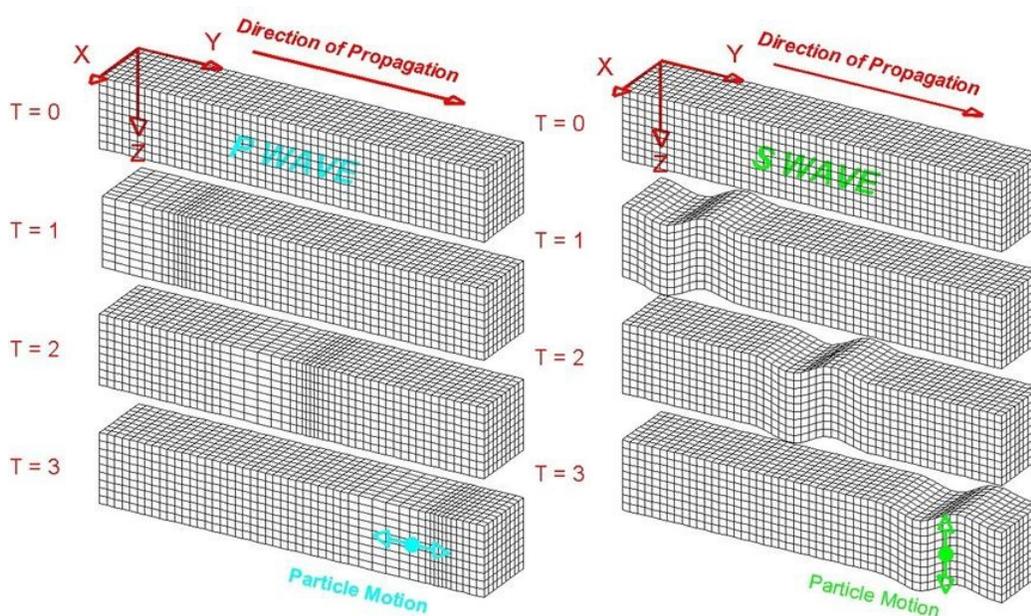


بهترین مثال در این مورد امواج لرزه‌ای ناشی از یک زمین‌لرزه است که از کانون زمین‌لرزه و از عمق زمین به طرف سطح زمین حرکت می‌کنند پدیده‌های مرتبط بر امواج که در فیزیک مطالعه گردیده‌اند در مورد این امواج لرزه‌ای نیز صادق می‌باشند پدیده‌هایی همچون انعکاس و انکسار که باعث می‌شوند موج لرزه‌ای از کانون زمین‌لرزه تا سطح زمین تغییر نماید.

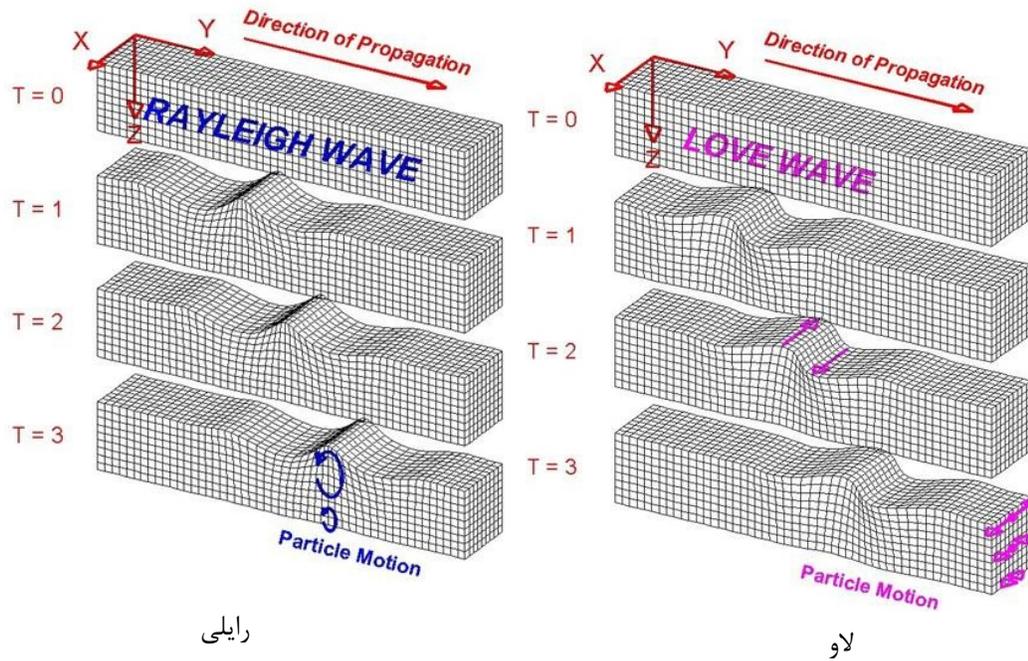
انواع محیط‌های ارتجاعی در مسائل مختلف

- ارتعاش امواج در محیط یک بعدی الاستیک و محدود
- ارتعاش امواج در محیط نامحدود
- ارتعاش امواج در محیط نیمه‌محدود
- لایه‌ای

انواع امواج حجمی در محیط ارتجاعی



ارتعاش امواج در محیط نیمه محدود (امواج سطحی R)



رایلی

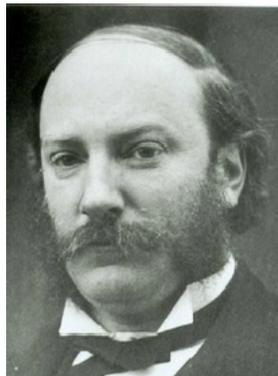
لاو

ارتعاش امواج در محیط نیمه محدود (امواج سطحی R)

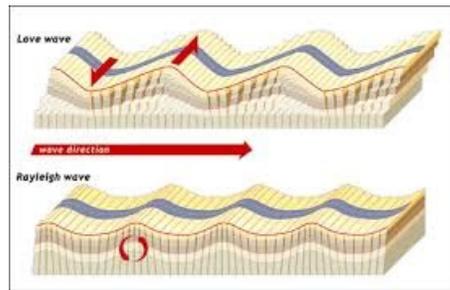
موج رایلی:

این موج توسط لورد رایلی در سال ۱۸۸۵ برای اولین بار بررسی شد.

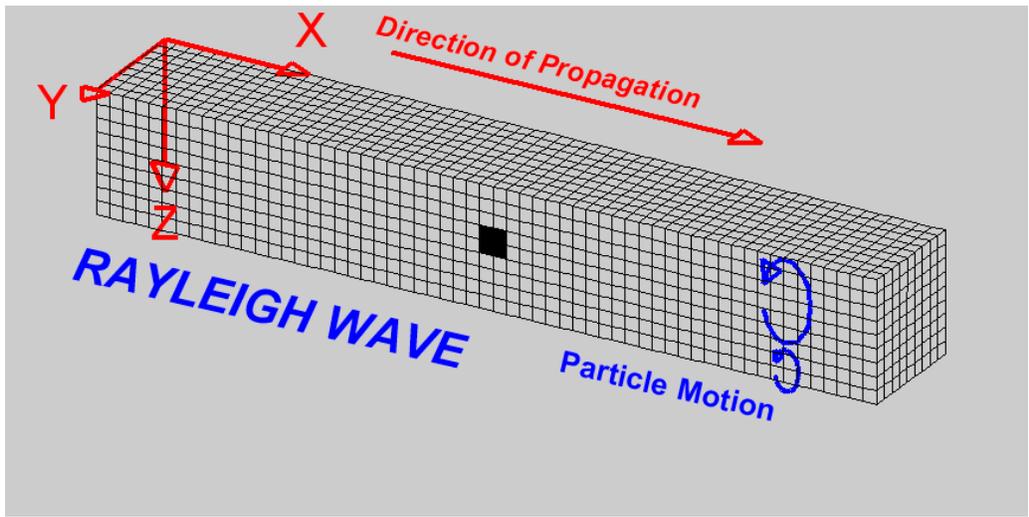
<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>



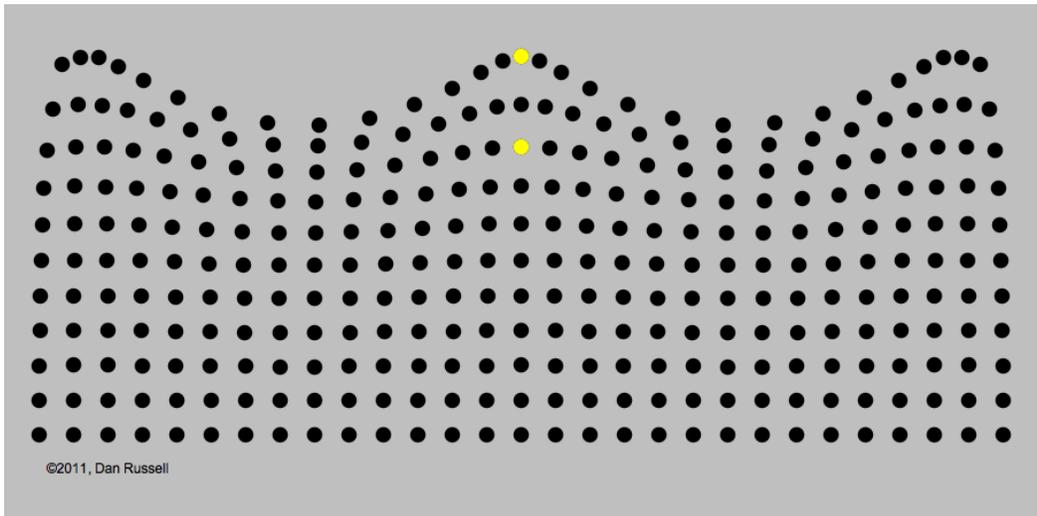
لورد رایلی



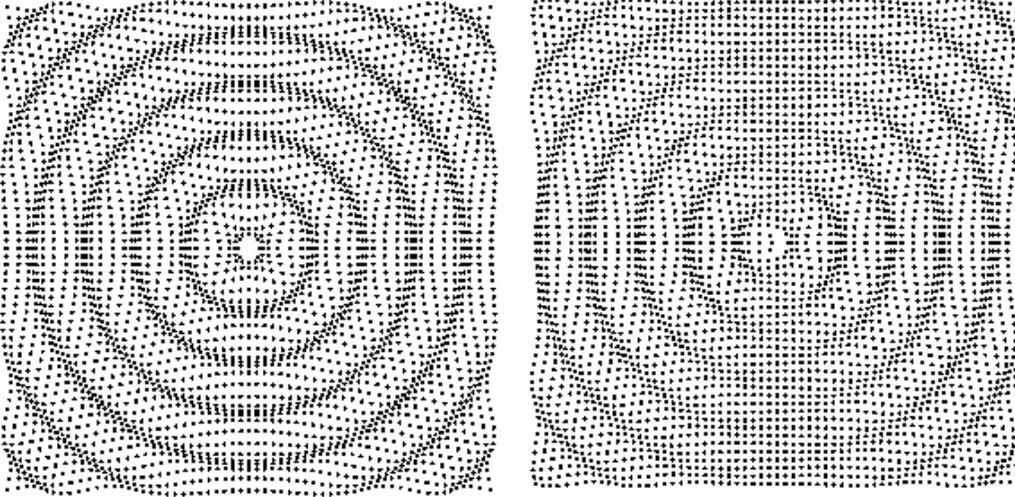
لاو



Water Waves

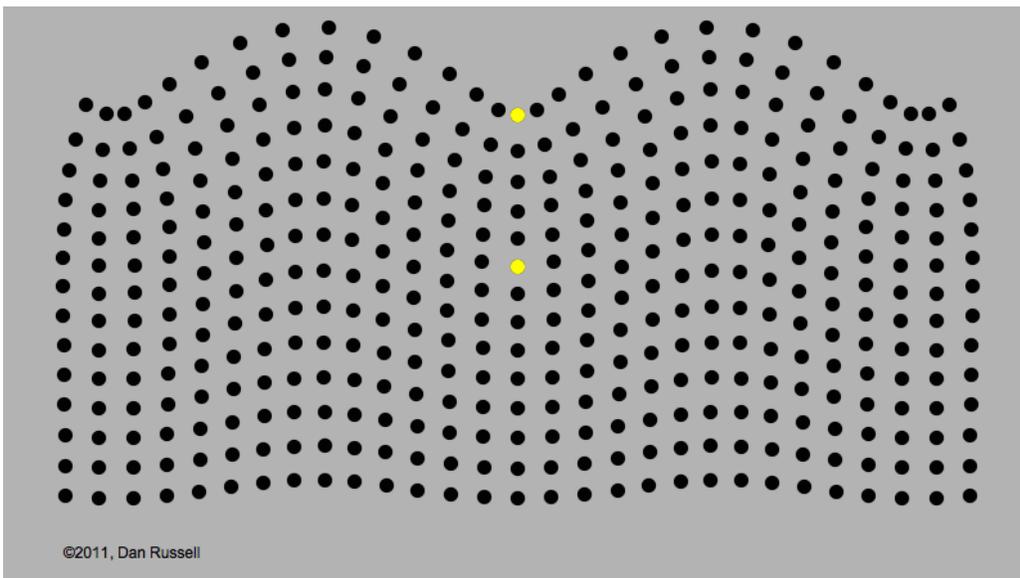


Radiation from a monopole and dipole sources

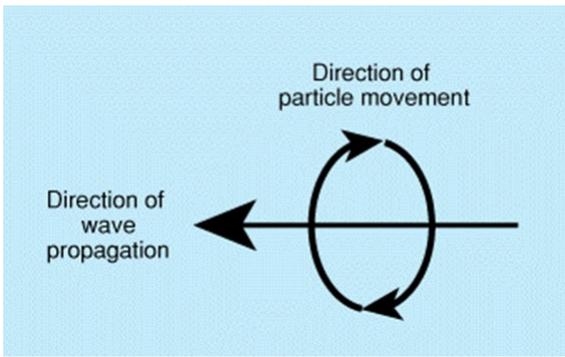


59

Rayleigh surface waves



60

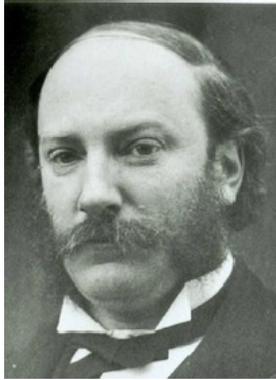


ارتعاش امواج در محیط نیمه محدود (امواج)

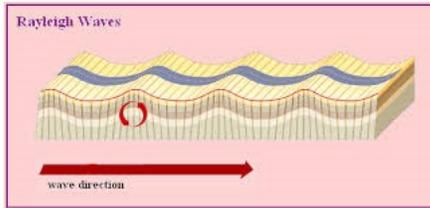
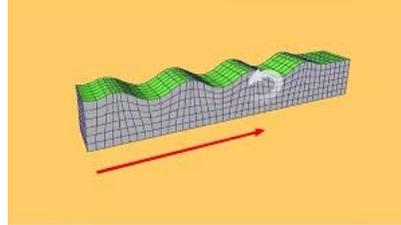
موج رایلی:

این موج توسط لورد رایلی در سال ۱۸۸۵ برای

<http://web.ics.purdue.edu/~braile/edumod/waves/Rwave.htm>



لورد رایلی



ارتعاش امواج در محیط نیمه محدود (امواج سطحی (R

موج رایلی:

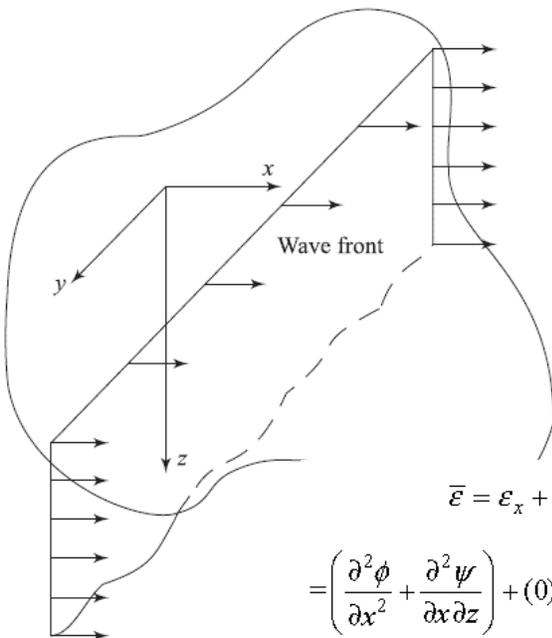
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

که در آن ϕ و ψ توابع پتانسیل هستند.

در انتشار موج رایلی تغییر مکان در جهت y

صفر است.



$$\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + (0) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

موج رابلی:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + (0) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

$$2\bar{\omega}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \psi$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi)$$

63

موج رابلی:

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\phi = F(z) \exp[i(\omega t - fx)]$$

$$\psi = G(z) \exp[i(\omega t - fx)]$$

$$f = \frac{2\pi}{\text{wavelength}}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

64

موج رایلی:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\phi = F(z) \exp[i(\omega t - fx)]$$

$$f = \frac{2\pi}{\text{wavelength}}$$

$$\psi = G(z) \exp[i(\omega t - fx)]$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 F(z) &= v_p^2 [F''(z) - f^2 F(z)] & F''(z) - q^2 F(z) &= 0 & q^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \\ -\omega^2 G(z) &= v_s^2 [G''(z) - f^2 G(z)] & G''(z) - s^2 G(z) &= 0 & s^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= A_1 e^{-qz} + A_2 e^{qz} & \xrightarrow{A_2 = B_2 = 0} & F(z) &= A_1 e^{-qz} & \phi &= (A_1 e^{-qz}) [e^{i(\omega t - fx)}] \\ G(z) &= B_1 e^{-sz} + B_2 e^{sz} & & G(z) &= B_1 e^{-sz} & \psi &= (B_1 e^{-sz}) [e^{i(\omega t - fx)}] \end{aligned}$$

65

موج رایلی:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\begin{aligned} \phi &= (A_1 e^{-qz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & f &= \frac{2\pi}{\text{wavelength}} & s^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \\ \psi &= (B_1 e^{-sz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & i &= \sqrt{-1} & q^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \end{aligned}$$

شرایط مرزی:

$$z = 0, \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \text{ and } \tau_{zy} = 0.$$

$$\sigma_z(z=0) = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_z = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$A_1 [(\lambda + 2G)q^2 - \lambda f^2] - 2iB_1 Gfs = 0$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{2iGfs}{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda f^2}$$

66

موج رابلی:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\begin{aligned} \phi &= (A_1 e^{-qz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & f &= \frac{2\pi}{\text{wavelength}} & s^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \\ \psi &= (B_1 e^{-sz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & i &= \sqrt{-1} & q^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \end{aligned}$$

شرایط مرزی:

$$z = 0, \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \text{ and } \tau_{zy} = 0.$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\tau_{zx(z=0)} = G \gamma_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$2iA_1 f q + (s^2 + f^2) B_1 = 0 \quad \frac{A_1}{B_1} = - \frac{(s^2 + f^2)}{2ifq}$$

موج رابلی:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\begin{aligned} \phi &= (A_1 e^{-qz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & f &= \frac{2\pi}{\text{wavelength}} & s^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \\ \psi &= (B_1 e^{-sz}) [e^{i(\omega t - fx)}] & i &= \sqrt{-1} & q^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \end{aligned}$$

شرایط مرزی:

$$z = 0, \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \text{ and } \tau_{zy} = 0.$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{2iGfs}{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda f^2} \quad \frac{A_1}{B_1} = - \frac{(s^2 + f^2)}{2ifq}$$

$$\frac{2iGfs}{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda f^2} = - \frac{(s^2 + f^2)}{2ifq} \quad 16 \left(1 - \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right) = \left[2 - \left(\frac{\lambda + 2G}{G} \right) \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right]^2 \left(2 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right)^2$$

موج رایلی:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 \phi = v_p^2 \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi$$

حل معادلات:

$$\begin{aligned} \phi &= (A_1 e^{-\alpha z}) [e^{i(\alpha x - \beta t)}] & f &= \frac{2\pi}{\text{wavelength}} & s^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \\ \psi &= (B_1 e^{-sz}) [e^{i(\alpha x - \beta t)}] & i &= \sqrt{-1} & q^2 &= f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \end{aligned}$$

شرایط مرزی:

$$z = 0, \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \text{ and } \tau_{zy} = 0.$$

$$16 \left(1 - \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right) = \left[2 - \left(\frac{\lambda + 2G}{G} \right) \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right]^2 \left(2 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right)^2$$

$$\text{Wavelength} = \frac{2\pi}{f} \quad \text{Wavelength} = \frac{\text{velocity of wave}}{(\omega/2\pi)} = \frac{v_r}{(\omega/2\pi)} \quad f = \frac{\omega}{v_r}$$

69

موج رایلی:

شرایط مرزی:

$$z = 0, \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \text{ and } \tau_{zy} = 0.$$

$$16 \left(1 - \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right) = \left[2 - \left(\frac{\lambda + 2G}{G} \right) \frac{\omega^2}{v_p^2 f^2} \right]^2 \left(2 - \frac{\omega^2}{v_s^2 f^2} \right)^2$$

$$f = \frac{\omega}{v_r}$$

ساده سازی:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{v_s^2}{v_p^2} & v_p^2 &= (\lambda + 2G)/\rho & \alpha^2 &= \frac{v_s^2}{v_p^2} = \frac{G}{\lambda + 2G} = \frac{(1 - 2\mu)}{(2 - 2\mu)} \\ & & v_s^2 &= G/\rho & & \\ \frac{v_r^2}{v_s^2} &= V^2 & & & & \end{aligned}$$

$$V^6 - 8V^4 - (16\alpha^2 - 24)V^2 - 16(1 - \alpha^2) = 0$$

μ	$V = v_r/v_s$
0.25	0.919
0.29	0.926
0.33	0.933
0.4	0.943
0.5	0.955

70

موج رایلی:

مثال: مقدار سرعت رایلی را بر حسب سرعت موج برشی برای یک مصالح با ضریب پواسون برابر با ۰.۲۵ تعیین کنید؟

$$V^6 - 8V^4 - (16\alpha^2 - 24)V^2 - 16(1 - \alpha^2) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{1 - 2\mu}{2 - 2\mu} = \frac{1 - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{1}{3}$$

$$V^6 - 8V^4 - \left(\frac{16}{3} - 24\right)V^2 - 16\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$3V^6 - 24V^4 + 56V^2 - 32 = 0$$

$$(V^2 - 4)(3V^4 - 12V^2 + 8) = 0$$

$$V^2 = 4, \quad 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$V^2 = 4, \quad \Rightarrow \quad \frac{s^2}{f^2} = 1 - V^2 = 1 - 4 = -3 \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$V^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \quad V^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad V = \frac{v_r}{v_s} = 0.9194$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = -(ifA_1e^{-qz} + B_1se^{-sz}) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

$$w = -(A_1qe^{-qz} - B_1ife^{-sz}) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

$$\phi = (A_1e^{-qz}) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

$$\psi = (B_1e^{-sz}) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

جابجایی ناشی از موج رایلی:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{(s^2 + f^2)}{2ifq}$$

$$u = A_1fi \left(-e^{-qz} + \frac{2qs}{s^2 + f^2} e^{-sz} \right) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

$$w = A_1q \left(-e^{-qz} + \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sz} \right) [e^{i(\alpha x - ft)}]$$

$$U = -e^{-qz} + \frac{2qs}{s^2 + f^2} e^{-sz} = -e^{-(q/f)(fz)} + \left[\frac{2(q/f)(s/f)}{s^2/f^2 + 1} \right] e^{-(s/f)(fz)}$$

$$W = -e^{-qz} + \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sz} = -e^{-(q/f)(fz)} + \frac{2}{s^2/f^2 + 1} e^{-(s/f)(fz)}$$

$$q^2 = f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2}$$

$$\frac{q^2}{f^2} = 1 - \frac{\omega^2}{f^2 v_p^2} = 1 - \frac{v_r^2}{v_p^2} = 1 - \alpha^2 V^2$$

$$s^2 = f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2}$$

$$\frac{s^2}{f^2} = 1 - \frac{\omega^2}{f^2 v_s^2} = 1 - \frac{v_r^2}{v_s^2} = 1 - V^2$$

جابجایی ناشی از موج رایلی:

مثال: میزان دامنه جابجایی ها موج رایلی برای محیطی با ضریب پواسون برابر با ۰.۲۵ را تعیین کنید؟

$$U = -e^{-qz} + \frac{2qs}{s^2 + f^2} e^{-sz} = -e^{-(q/f)(fz)} + \left[\frac{2(q/f)(s/f)}{s^2/f^2 + 1} \right] e^{-(s/f)(fz)}$$

$$W = -e^{-qz} + \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sz} = -e^{-(q/f)(fz)} + \frac{2}{s^2/f^2 + 1} e^{-(s/f)(fz)}$$

$$\frac{q^2}{f^2} = 1 - \alpha^2 V^2 = 1 - \left(\frac{1-2\mu}{2-2\mu} \right) V^2 = 1 - \left(\frac{1-0.5}{2-0.5} \right) (0.9194)^2 = 0.7182 \quad \frac{q}{f} = 0.8475$$

$$\frac{s^2}{f^2} = 1 - V^2 = 1 - (0.9194)^2 = 0.1547 \quad \frac{s}{f} = 0.3933$$

$$U_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 0.5773 \exp(-0.3933 fz)$$

$$W_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 1.7321 \exp(-0.3933 fz)$$

جابجایی ناشی از موج رایلی:

دو نکته مهم در مورد این مثال:

$$U_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 0.5773 \exp(-0.3933 fz)$$

$$W_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 1.7321 \exp(-0.3933 fz)$$

۱- با افزایش fz دامنه U بسرعت کاهش می یابد میزان دامنه جابجایی در $z = 1.21/f$ برابر با صفر خواهد شد. در مقادیر عمق بیشتر جابجایی با علامت منفی است ولی همچنان جابجایی محدود و به سمت صفر میل می کند.

$$f = \frac{2\pi}{\text{wavelength}} \quad z = 1.21/f = 1.21(\text{wavelength})/2\pi = 0.1926 (\text{wavelength})$$

$$i = \sqrt{-1}$$

۲- با افزایش fz دامنه W ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. به شکل صفحه بعد مراجعه شود.

$$z = 0.076(\text{wavelength}) \quad fz = 0.4775$$

جابجایی ناشی از موج رایلی:

دو نکته مهم در مورد این مثال:

$$U_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 0.5773 \exp(-0.3933 fz)$$

$$W_{(\mu=0.25)} = -\exp(-0.8475 fz) + 1.7321 \exp(-0.3933 fz)$$

۱- با افزایش fz دامنه U بسرعت کاهش می یابد میزان دامنه جابجایی در $z = 1.21/f$ برابر با صفر خواهد شد. در مقادیر عمق بیشتر جابجایی با علامت منفی است ولی همچنان جابجایی محدود و به سمت صفر میل می کند.

$$f = \frac{2\pi}{\text{wavelength}}$$

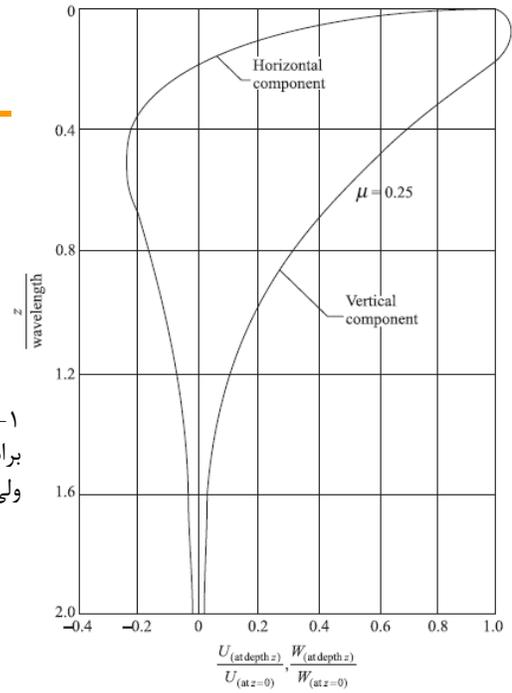
$$i = \sqrt{-1}$$

$$z = 1.21/f = 1.21(\text{wavelength})/2\pi = 0.1926 (\text{wavelength})$$

۲- با افزایش fz دامنه W ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. به شکل صفحه بعد مراجعه شود.

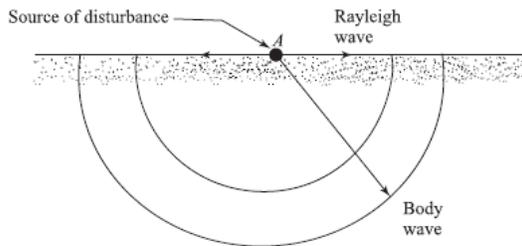
$$z = 0.076(\text{wavelength})$$

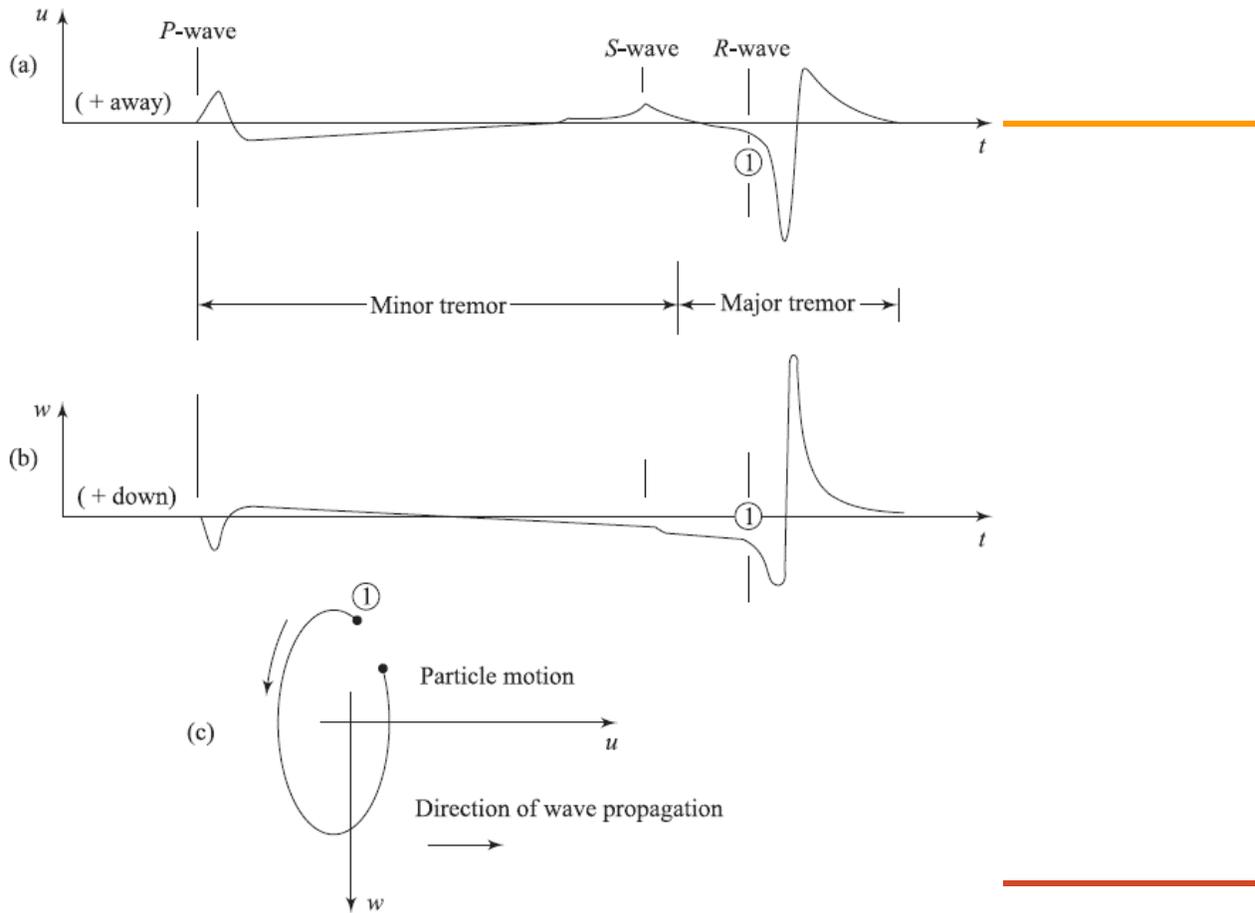
$$fz = 0.4775$$



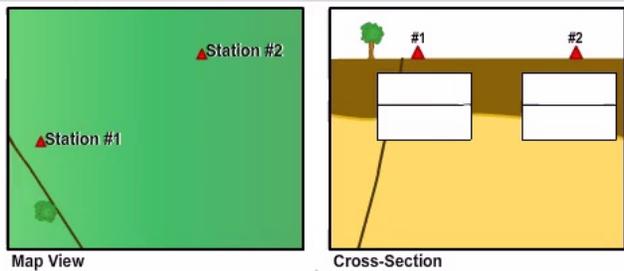
میرایی انتشار امواج با فاصله (میرایی هندسی):

اگر در نقطه A یک بار پالسی وارد شود، موج های حجمی بصورت یک نیم کره انتشار می یابند و موج رایلی بصورت شعاعی و استوانه ای بسمت اطراف انتشار می یابد.

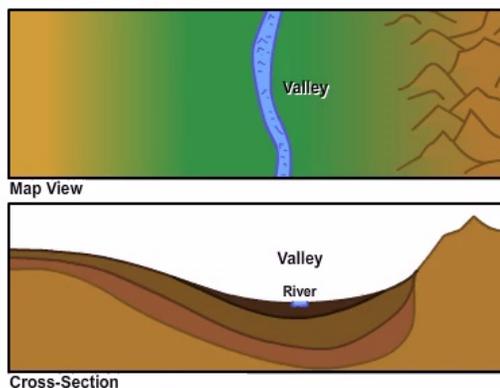




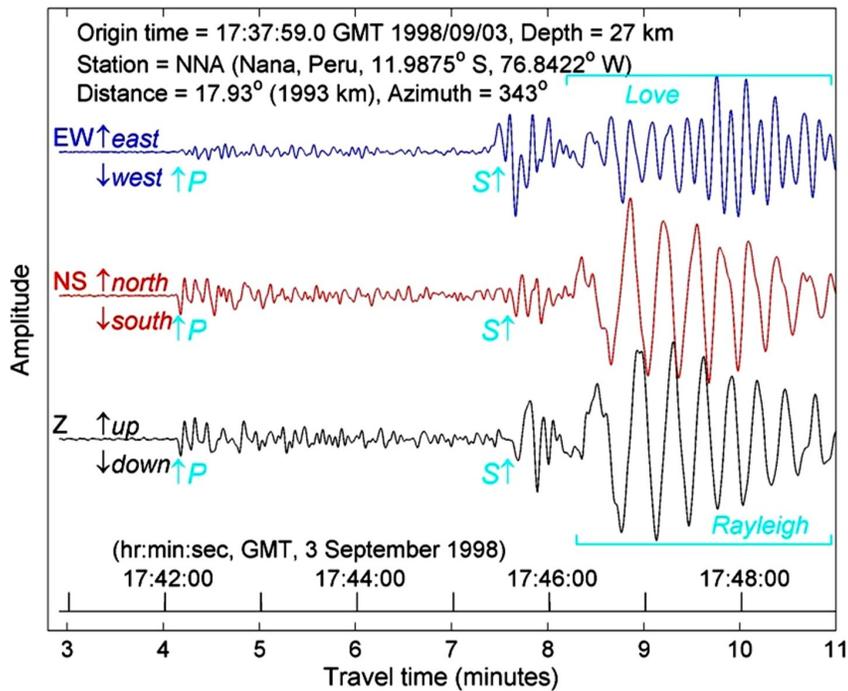
USGS Attenuation



USGS Amplification



Magnitude 6.5 earthquake, near coast of central Chile, 29.2934° S, 71.5471° W



79

میرایی انتشار امواج با فاصله (میرایی هندسی):

وقتی که امواج حجمی به صورت جبهه‌هایی از امواج نیم‌مکروی که در اثر ارتعاش در سطح یک محیط نیمه‌بی‌نهایت ارتجاعی به وجود آمده‌اند پخش گردند انرژی حاصله در سطحی توزیع می‌شود که با مجذور شعاع در حال افزایش می‌باشد. بنابراین:

$$E' \propto \frac{1}{r^2} \quad \text{Amplitude} \propto \sqrt{E'} \propto \sqrt{\frac{1}{r^2}}$$

$$\text{Amplitude} \propto \frac{1}{r}$$

اما در موج رایلی از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$\text{Amplitude} \propto 1/\sqrt{r}$$

اثر کاهندگی موج رایلی کمتر از موجهای حجمی است.:

80

میرایی انتشار امواج با فاصله (میرایی هندسی):

کاهش دامنه امواج را بر اثر پخش شدن میرایی هندسی می‌نامند علاوه بر این میرایی نوع دیگری از میرایی نیز که ناشی از جذب انرژی توسط ماده است، وجود دارد این میرایی را میرایی مادی می‌گویند.

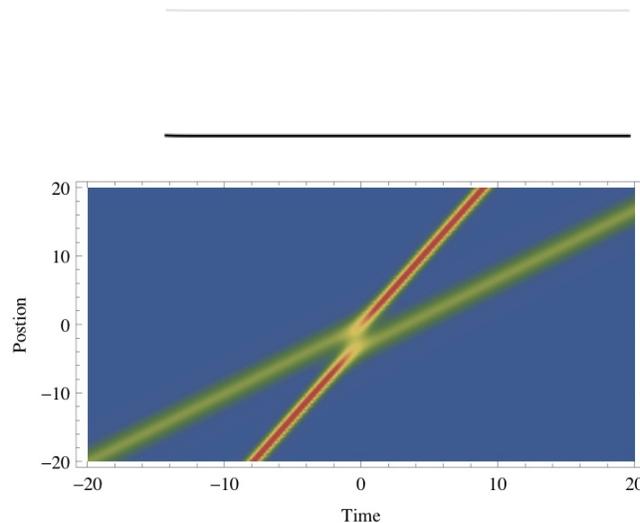
بورینتز (۱۹۳۱) رابطه‌ای را برای دامنه اثر عمودی امواج رایلی و با در نظر گرفتن میرایی مادی و هندسی به صورت زیر ارائه کرده است:

$$A_n = A_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_n}} \exp(-\beta (r_n - r_1))$$

که در رابطه فوق r_n, r_1 فواصل دو نقطه $n, 1$ و A_n, A_1 مقادیر دامنه ی عمودی امواج و β ضریب جذب مصالح می باشد.

A Beautiful Phenomena

Collision between two solitons traveling in the same direction



Thanks For Your Attention

