تا به حال روابط عدم قطعیت

$$\Delta x \, \Delta k \geq 1$$

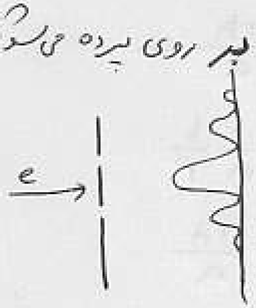
$$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar$$

را شاهد کرده‌ایم. آشکار است که اگر سعی کنیم یک بسته موج بسیار جایگزیده در فضای x بسازیم یعنی اگر بخواهیم Δx را خیلی کوچک کنیم، آنگاه نسبت دادن یک تکانه کاملاً معین به آن بسته موج غیرممکن می‌شود.

در فیزیک کلاسیک، تکانه و مکان مستقل از یکدیگرند. اما در مکانیک کوانتومی، مکان و تکانه و انرژی های مکمل یکدیگرند. بر اساس نظریه مکانیک کوانتومی هرگز نمی‌توان مکان و تکانه را به طور همزمان تعیین کرد.

مثال) آزمایش دو شکافی

عبور باریکه الکترونی از دو شکافی باعث ایجاد یک طرح تداخلی بر روی پرده می‌شود.

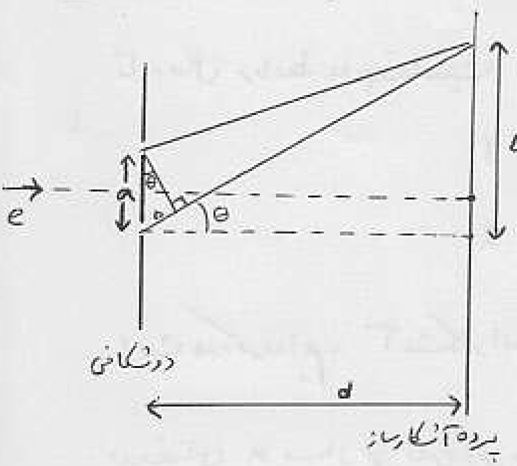


طرح تداخلی

(رفتاری شبیه با امواج)

اگر سعی کنیم که تعیین کنیم الکترون از کدام شکاف عبور کرده است، طرح تداخلی از بین می‌رود.

می‌توان با استفاده از اصل عدم قطعیت نشان داد که تعیین شکاف گذر الکترون باعث خراب شدن نقش تداخل می‌شود.



$$\sin\theta = \frac{\Delta}{a}$$

$$\Delta = a\sin\theta = n\lambda$$ شرط تداخل سازنده

$$\sin\theta_n = \frac{n\lambda}{a}$$

از طرف دیگر : $\sin\theta = \dfrac{\Delta'}{\sqrt{d^2+\Delta'^2}} = \dfrac{\Delta'}{d\sqrt{1+\frac{\Delta'^2}{d^2}}} \simeq \dfrac{\Delta'}{d}$

$$\Delta' = d\sin\theta$$

Δ' > فاصله بین بیشینه‌های مجاور

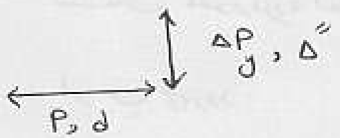
فاصله بین بیشینه‌های مجاور $\simeq d\sin\theta_{n+1} - d\sin\theta_n = \dfrac{d(n+1)\lambda}{a} - \dfrac{dn\lambda}{a} = \dfrac{d\lambda}{a}$

اگر به کمک دیده بان سعی کنیم محل شکاف عبور الکترون را بیابیم $\rightarrow \Delta y < \dfrac{a}{2} \xrightarrow{\text{since } \Delta y \Delta p > h} \Delta p > \dfrac{h}{\Delta y} \rightarrow$

$$\Delta p > \frac{2h}{a} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta p}{p} > \frac{2}{a}\frac{h}{p}$$

$$\frac{\Delta p}{p} > \frac{2\lambda}{a}$$



$\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{\Delta''}{d} \longrightarrow \Delta'' = \dfrac{\Delta p}{p}\, d > \dfrac{2\lambda d}{a} >$ فاصله بین بیشینه‌های مجاور

پس در صورت داشتن $\Delta y < \frac{a}{2}$ ، طرح تداخلی خراب می‌شود .

مثال) اتم بور

در الگوی اتمی بور، مدارها با شعاع $R_n = \frac{n^2 \hbar}{m\alpha c}$ داده می‌شود.

اگر به دنبال آزمایشی باشیم که مکان الکترون در اتم را با دقت اندازه‌گیری کند یعنی

$$\Delta x \ll R_n - R_{n-1} \simeq \frac{2n\hbar}{m\alpha c}.$$

آنگاه بر اساس اصل عدم قطعیت $\Delta x \Delta p \geq \hbar$، به دست می‌آید

$$\Delta p \gg \frac{mc\alpha}{2n}$$

در این صورت عدم قطعیت در انرژی الکترون برابر می‌شود با:

$E = \frac{p^2}{2m}$

$\Delta E = \frac{2p\Delta p}{2m}$

$$\Delta E \simeq \frac{p\Delta p}{m} \gg \underbrace{\left(\frac{mc\alpha}{n}\right)}_{p_n = mv_n = \frac{mc\alpha}{n}} \underbrace{\left(\frac{\alpha c}{2n}\right)}_{\frac{\Delta p}{m}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2\alpha^2}{n^2}$$

که معلوم می‌شود ΔE خیلی بزرگ‌تر از انرژی بستگی الکترون در مدار است.

پس این اندازه‌گیری به احتمال زیاد الکترون را از مدار خارج می‌کند.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{یادآوری: الگوی اتمی بور} \\ R_n = \frac{n^2\hbar}{m\alpha c} \\ V_n = \frac{\alpha c}{n} \\ P_n = \frac{m\alpha c}{n} \\ E_n = -\frac{1}{2}\frac{mc^2\alpha^2}{n^2} \end{array}}$

برآورد مرتبه بزرگی

مثال) اتم هیدروژن

اگر محدوده تقریبی الکترون در اتم r باشد، آنگاه انرژی عبارت است از

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} .$$

اصل عدم قطعیت را می‌توان بصورت $pr \sim \hbar$ درنظر گرفت.

در این صورت
$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \quad \star$$

مقدار کمینه انرژی از رابطه زیر به دست می‌آید،

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{mr} + e^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad r = \frac{\hbar^2}{me^2} \overset{\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}}{=} \frac{\hbar}{mc\alpha}$$

با قرار دادن r در رابطه $\star$ ، مقدار انرژی به دست می‌آید

$$\boxed{E = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^2}$$

به نظر می‌رسد که می‌توان از اصل عدم قطعیت برای برآورد مرتبه بزرگی برخی کمیت‌ها در مسائل مختلف بهره برد.

فصل ۳ - معادله موج شرودینگر و تفسیر احتمالاتی

تابع موج $$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, e^{i(px-Et)/\hbar} \qquad \text{(I)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\; i\hbar \frac{-iE}{\hbar}\, e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\; E\, e^{i(px-Et)/\hbar}$$

فرض $$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p) \left(\frac{p^2}{2m} + V\right) e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, \frac{p^2}{2m}\, e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, V\, e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) e^{i(px-Et)/\hbar} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, V(x)\, e^{i(px-Et)/\hbar} =$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, e^{i(px-Et)/\hbar}}_{=\Psi(x,t)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

معادله دیفرانسیل مربوط به ذره با انرژی $E=\frac{p^2}{2m}+V(x)$

(II)

اگر ذره مورد نظر، ذره آزاد باشد، آنگاه: $V=0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

معادله شرودینگر ذره آزاد

(III)

معادله شرودینگر خطی است. اگر چند جواب برای آن وجود داشته باشد، ترکیب خطی جوابهای ممکن نیز جواب خواهد بود.

اگر Ψ_1 و Ψ_2 دو جواب ممکن برای معادله II باشد:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1 + V\Psi_1 \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2 + V\Psi_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{تحقیق کرد که}]{\text{به راحتی می‌توان}}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2\right] + V\left[\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2\right]$$

$$\Downarrow$$

آشکار است که تابع $\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2$ نیز در معادله شرودینگر صدق می‌کند

پس $\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2$ (ترکیب خطی دلخواه از Ψ_1 و Ψ_2) نیز جواب است.

برای ذره تحت پتانسیل $V(x)$

معادله دیفرانسیل $$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t) \qquad \text{II}$$

عمومی ترین جواب: $$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\,e^{i(px-Et)/\hbar}$$

برای ذره آزاد $(V=0)$

معادله دیفرانسیل $$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{III}$$

عمومی ترین جواب $$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\,e^{i\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)/\hbar} \qquad \text{III-b}$$

معادله III برحسب مشتق زمان از مرتبه اول است. اگر مقدار تابع موج در زمان اولیه $t=0$ به صورت $\psi(x,0)$ معلوم باشد، می‌توان مقدار آن را در زمان‌های دیگر به دست آورد.

با قرار دادن $\psi(x,0)$ در معادله III-b می‌توان $\phi(p)$ را به دست آورد و با یافتن $\phi(p)$ و قرار دادن در III-b جمع $\psi(x,t)$ ها در همه زمان‌ها به دست می‌آید.

$$\text{III-b} \quad t=0:\ \psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\,e^{ipx/\hbar}$$

$$\int \psi(x,0)\,e^{-ip'x/\hbar}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\int dp\; e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}}\,\phi(p)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\;2\pi\hbar\,\delta(p-p')$$

صث

$$= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\Phi(p')$$

$$\rightarrow \Phi(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\;\psi(x,0)\,e^{\frac{-ip'x}{\hbar}} \longrightarrow$$

با داشتن $\psi(x,0)$ توانستیم $\Phi(p')$ را بدست آوریم.

حال با داشتن $\Phi(p)$ و قرار دادن آن در رابطه

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\;\Phi(p)\;e^{\frac{ipx}{\hbar} - \frac{ip^2t}{2m\hbar}}$$

می‌توان در هر زمان‌های دیگر $\psi(x,t)$ را بدست آورد.

* در اثبات رابطه فوق از رابطه $\int dx\, e^{\frac{i(p-p')x}{\hbar}} = 2\pi\hbar\,\delta(p-p')$ استفاده شده است.