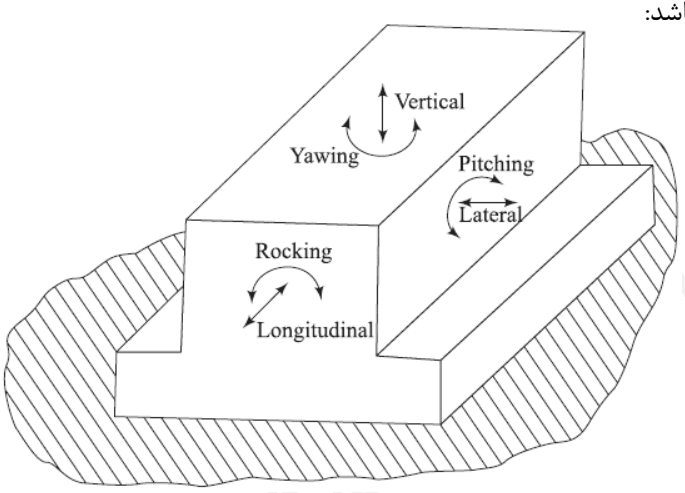
ارتعاشات شالوده و پی

مقدمه: در فصل دوم به طبیعت نیروهای وارد به پی به طور خلاصه اشاره شد،که نیروهای وارد به سیکلیک فونداسیون شامل ۶ حالت همانند شکل زیر می باشد:

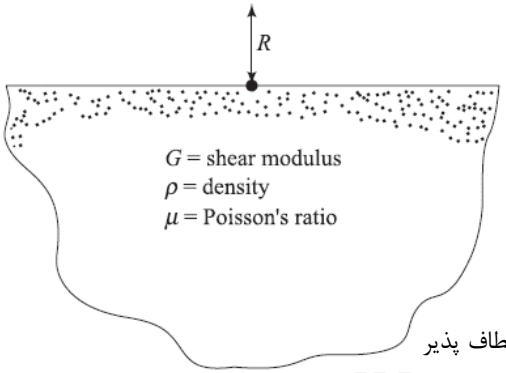


در این فصل فرض بر این است که سیستم شالوده روی خاک الاستیک قرار دارد که این خود مستلزم این است که خاک در حالت کلی به صورت یک جسم نیمه بی نهایت ، همگن و ایزوتروپیک در نظر گرفته شود .

این در حالی است که اجزای خاک تنها در سطوح کرنش پایین این شرط را دارا می باشند، به همین دلیل تئوری هایی که در اینجا مورد بررسی قرار می گیرند، در حالاتی که پی تحت تاثیر ارتعاشات با دامنه های کوتاه قرار دارد، صادق است.

ارتعاش عمودی شالوده دایره ای بنا شده بر روی سطح نیم فضای الاستیک

لمب (۱۹۰۴) مساله ارتعاش یک نیروی نوسان کننده منفرد را که در یک نقطه از سطح نیم فضای ارتجاعی اعمال می شد مورد مطالعه قرار داد.

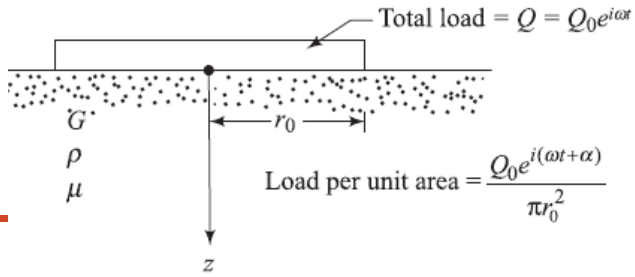


نیروی ارتعاشی بر روی سطح فضای نیمه الاستیک: قابل ذکر می باشد که نیروی ارتعاشی می تواند هم در راستای عمودی و هم در راستای افقی باشد. این موضوع به مساله دینامیکی بوسینسک اشاره می کند.

مساله ریسنر:

ریسنر (۱۹۳۶)، ۳۲ سال پس از لمب، مساله ارتعاش شالوده دایره ای انعطاف پذیر تحت بارگذاری یکنواخت را مورد تحلیل قرار داد.

جواب نهایی حاصل از انتگرال گیری از روش لمب بود. بر اساس روش ریسنر، جابجایی عمودی در مرکز سطح بارگذاری شده و انعطاف پذیر، طبق رابطه زیر محاسبه می شود:



$$z = \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{G r_0}\left(f_1 + i f_2\right)$$

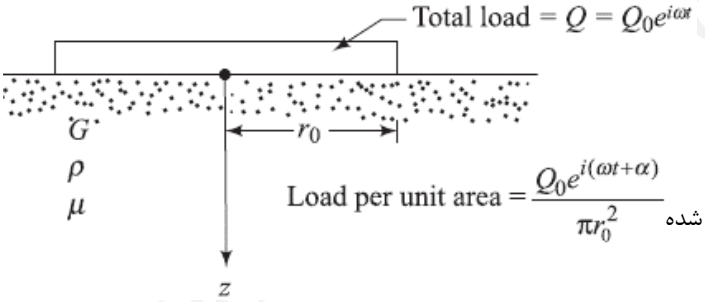
Ali Asgari, hD in Geotechnics

ارتعاش عمودی شالوده دایره ای بنا شده بر روی سطح نیم فضای الاستیک

مساله ریسنر:

ریسنر (۱۹۳۶)، ۳۲ سال پس از لمب، مساله ارتعاش شالوده دایره ای انعطاف پذیر تحت بارگذاری یکنواخت را مورد تحلیل قرار داد.

جواب نهایی حاصل از انتگرال گیری از روش لمب بود. بر اساس روش ریسنر، جابجایی عمودی در مرکز سطح بارگذاری شده و انعطاف پذیر، طبق رابطه زیر محاسبه می شود:



$$z = \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{G r_0}\left(f_1 + i f_2\right)$$

در رابطه روبرو داریم :

Q_0: دامنه بارگذاری

z: تغییر مکان متناوب در مرکز ناحیه بارگذاری شده

ω: فرکانس دایره ای بار اعمال شده

r_0: شعاع ناحیه بارگذاری شده

f_1, f_2: توابع جابجایی ریسنر(به ضریب پواسون و فرکانس بارگذاری بستگی دارند که بعدا راجع آن بحث می شود)

ρ: جرم مخصوص محیط الاستیک مثلا خاک

v_s: سرعت موج برشی در ماده ارتجاعی که پی روی آن قرار گرفته است.

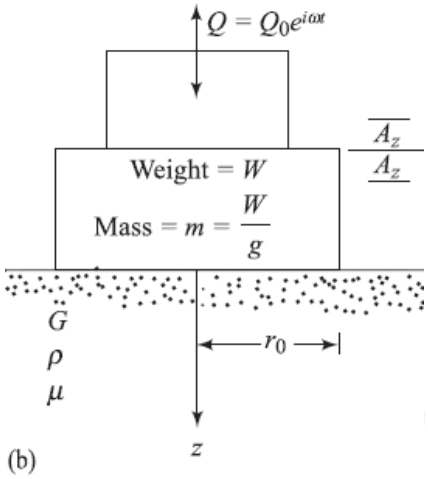
G: مدول برشی محیط

$$f_1, f_2 = F\left(a_0, \mu\right)$$

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s}$$

Ali Asgari, hD in Geotechnics

حال می خواهیم دامنه جابجایی شالوده دایروی انعطاف پذیر به وزن w همانند شکل زیر را با کمک روابط ریسنر تعیین کنیم:



$$A_z = \frac{Q_0}{G r_0} Z, \qquad Z = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - b a_0^2 f_1\right)^2 + \left(b a_0^2 f_2\right)^2}}$$

$$b = \frac{m}{\rho r_0^3} = \left(\frac{W}{g}\right)\left(\frac{1}{(\gamma/g) r_0^3}\right) = \frac{W}{\gamma r_0^3},$$

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s}$$

که در آن:

A_z دامنه ارتعاش پی

Z دامنه بدون بعد

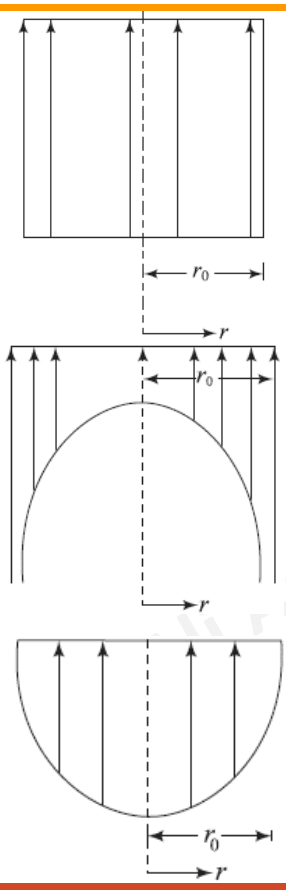
b ضریب جرم بدون بعد

a_0 فرکانس بدون بعد

γ جرم مخصوص ماده الاستیک(در اینجا منظور خاک میباشد)

ρ چگالی ماده الاستیک

v_s سرعت موج برشی در ماده ارتجاعی که پی روی آن قرار گرفته است.



مدل ریسنر مربوط به پی دایره ای انعطاف پذیر می باشد (اولین شکل) که این بدان معناست عکس العمل خاک در سرتاسر سطح زیر پی یکنواخت می باشد، در سال ۱۹۵۳ کویینلن و سونگ، پی را دایره ای و صلب در نظر گرفتند. روابط همان روابط اسلاید قبل است با این تفاوت که توابع جابجایی f_1, f_2 با توجه به توزیع فشار متفاوت است.

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^2} \left(\textbf{for } r \le r_0\right)$$

- پی دایره ای صلب:

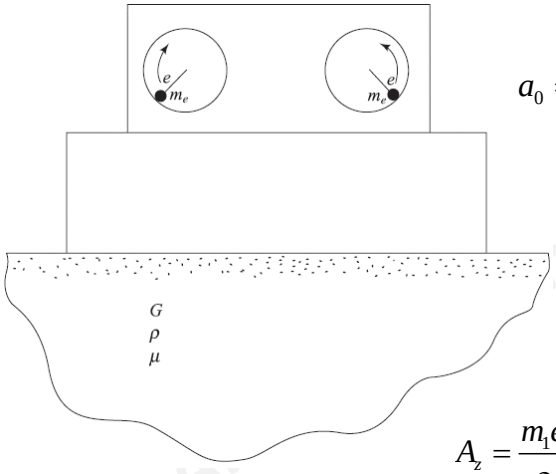
$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{2\pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \left(\textbf{for } r \le r_0\right)$$

- پی های با توزیع فشار تماسی سهمی وار:

$$q = \frac{2\left(r_0^2 - r^2\right) Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^4} \left(\textbf{for } r \le r_0\right)$$

اگر بر روی پی، نوسان کننده ی دورانی، همانند شکل زیر داشته باشیم، دامنه ارتعاش طبق روابط ارائه شده محاسبه می شود.

$$Q_0 = 2m_e e\omega^2 = m_1 e\omega^2 *, \quad A_z = \frac{Q_0}{Gr_0}\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_0^2 f_1\right)^2 + \left(ba_0^2 f_2\right)^2}} **$$



$$a_0 = \omega r_0\sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s}, \qquad \omega^2 = \frac{a_0^2 G}{\rho r_0^2} ***$$

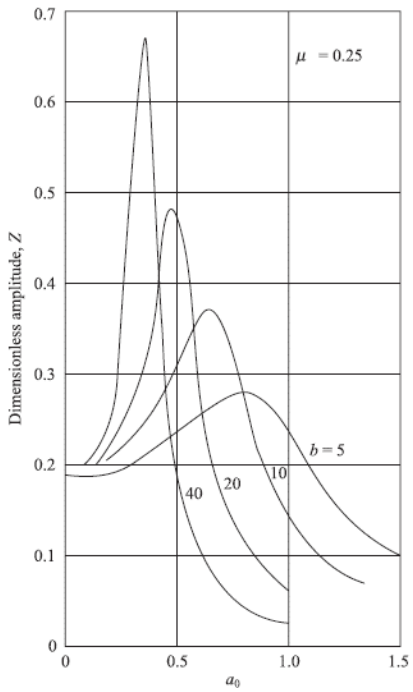
$$b = \frac{m}{\rho r_0^3} = \left(\frac{W}{g}\right)\left(\frac{1}{(\gamma/g) r_0^3}\right) = \frac{W}{\gamma r_0^3},$$

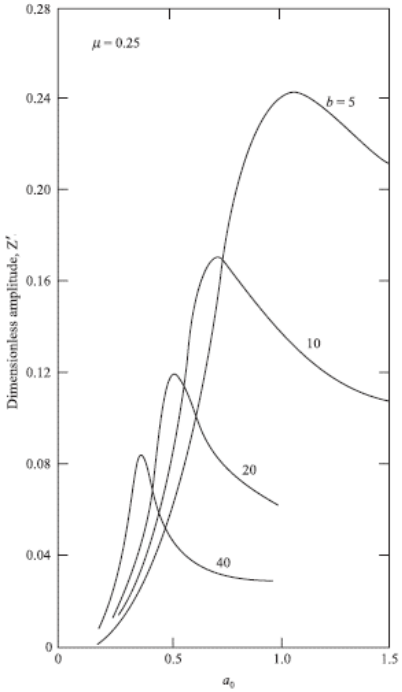
با جایگذاری رابطه سه استار در استار و سپس در دو استار داریم:

$$A_z = \frac{m_1 e a_0^2}{\rho r_0^3}\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_0^2 f_1\right)^2 + \left(ba_0^2 f_2\right)^2}} = \frac{m_1 e}{\rho r_0^3} Z'$$

$$Z' = a_0^2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_0^2 f_1\right)^2 + \left(ba_0^2 f_2\right)^2}}$$

نمودارهای زیر، تغییرات دامنه بی بعد Z و Z' بر حسب a_0 را برای پی دایروی صلب نمایش می دهد. (Richart,1962)



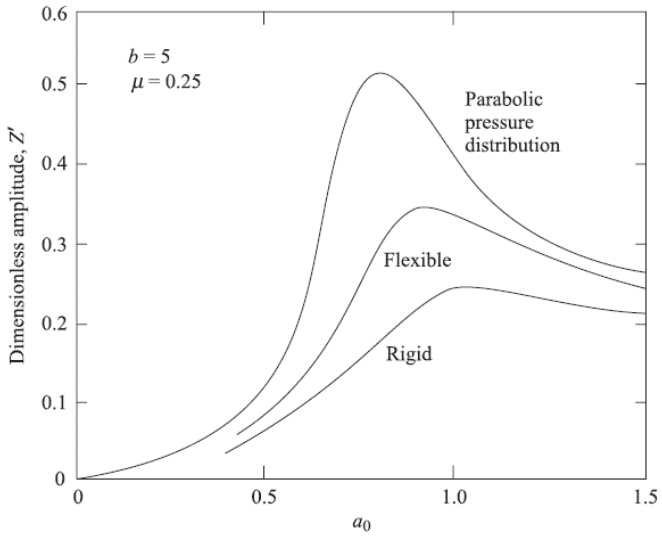


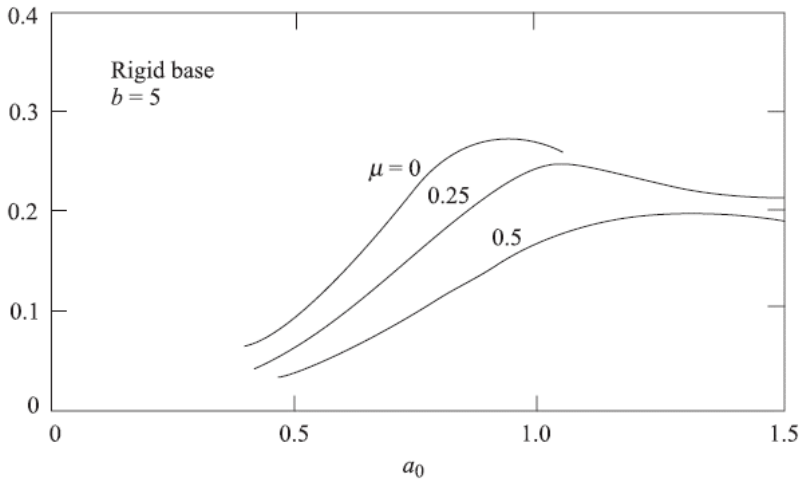
$$Z = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_0^2 f_1\right)^2 + \left(ba_0^2 f_2\right)^2}} \qquad Z' = a_0^2\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_0^2 f_1\right)^2 + \left(ba_0^2 f_2\right)^2}}$$

تاثیر توزیع فشار تماسی و ضریب پواسون:

در شکل چپ دامنه بی بعد Z' بر حسب a_0 برای شالوده های مختلف از لحاظ فشار تماسی مشاهده می شود. همانطور که از این شکل دریافت می شود دامنه بی بعد برای پی صلب،کمترین و برای پی با توزیع سهمی، بیشترین مقدار را دارا می باشد.

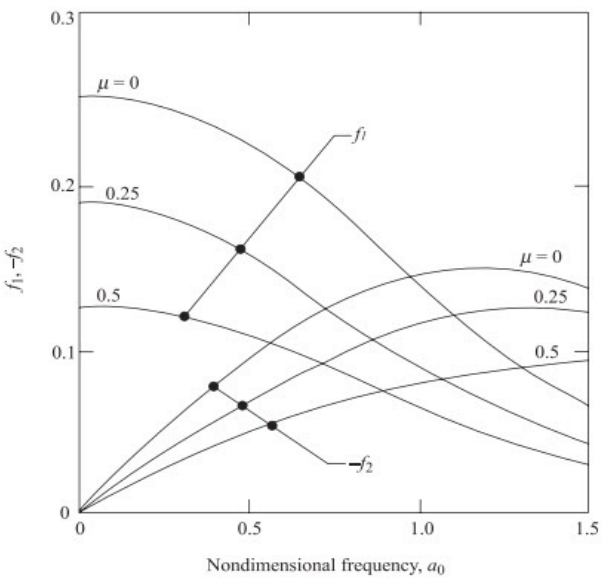
در شکل سمت راست اثر ضریب پواسون بر روی دامنه بی بعد را برای شالوده صلب نشان می دهد که با افزایش ضریب پواسون در یک مقدار ثابت a_0 ، دامنه بی بعد کاهش می یابد.(Richart and Whitman, 1967)





تغییرات توابع جابجایی نسبت به عامل بی بعد فرکانس:

در مطالعات سانگ، فرض شده بود که توزیع فشار تماسی در محدوده ی وسیعی از فرکانس در نظر گرفته، ثابت می ماند اما برای شرایط بارگذاری دینامیکی، توزیع فشار پی صلب، جابجایی های یکنواختی را ایجاد نمی کند به همین دلیل بیکروف Bycroft (1956) جابجایی های وزنی معادل، زیر پی را تعیین کرد. تغییرات توابع جابجایی در شکل زیر نمایش داده شده است:



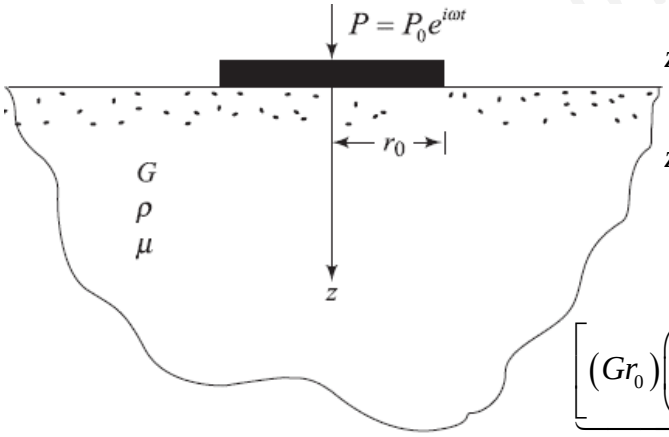
راه حل های مشابه، برای ارتعاش عمودی شالوده ها:

۱- روش حسیه (***Hsieh's Analog***)　　۲- روش لایسمر (***Lysmer's Analog***)

۱- روش حسیه (*Hsieh's Analog*):

حسیه (1962)، روش ریسنر را با در نظر گرفتن میرایی اصلاح کرد. در واقع حسیه، معادله حرکت اجباری یک درجه آزادی با میرایی $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = f(t)$ را در نظر گرفت. حسیه در دو گام مسئله را تحلیل کرد. گام اول: ابتدا شالوده را بصورت صفحه ی صلب دایروی بدون وزن بر روی سطح نیم فضای الاستیک در نظر گرفت و در گام دوم: سپس وزن شالوده را لحاظ کرد.

گام اول: شالوده دایره ای صلب بدون وزن بر روی سطح نیم فضای الاستیک: فرض کنید شالوده بی وزن، تحت بار قائم $P = P_0 e^{i\omega t}$ قرار دارد در این صورت جابجایی در وسط شالوده صلب از روش ریسنر برابر است با:



$$z = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0}\left(f_1 + if_2\right) = \frac{P}{Gr_0}\left(f_1 + if_2\right)$$

با گرفتن مشتق نسبت به زمان:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{P_0 \omega e^{i\omega t}}{Gr_0}\left(if_1 - f_2\right) = \frac{P\omega}{Gr_0}\left(if_1 - f_2\right)$$

با ترکیب دو رابطه فوق، داریم:

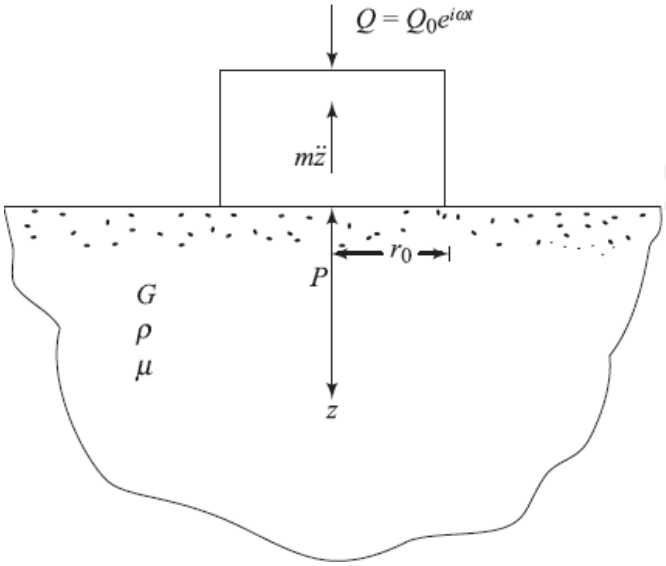
$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{P\omega}{Gr_0}\left(f_1^2 + f_2^2\right)$$

$$\underbrace{\left[\left(Gr_0\right)\left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}\right)\right]}_{k_z} z + \underbrace{\left[\left(\frac{Gr_0}{\omega}\right)\left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}\right)\right]}_{c_z} \frac{dz}{dt} = P \;\Rightarrow\; P = k_z z + c_z \dot{z}$$

راه حل های مشابه، برای ارتعاش عمودی شالوده ها:

۱- روش حسیه (***Hsieh's Analog***)　　۲- روش لایسمر (***Lysmer's Analog***)

گام دوم: شالوده دایره ای صلب با جرم m بر روی سطح نیم فضای الاستیک: فرض کنید شالوده با جرم m، تحت بار قائم $Q = Q_0 e^{i\omega t}$ قرار دارد در این صورت معادله تعادل برابر است با:



$$m\ddot{z} = Q - P \;*$$

از گام اول داریم:

$$P = \underbrace{\left[\left(Gr_0\right)\left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}\right)\right]}_{k_z} z + \underbrace{\left[\left(\frac{Gr_0}{\omega}\right)\left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}\right)\right]}_{c_z} \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow\; P = k_z z + c_z \dot{z}$$

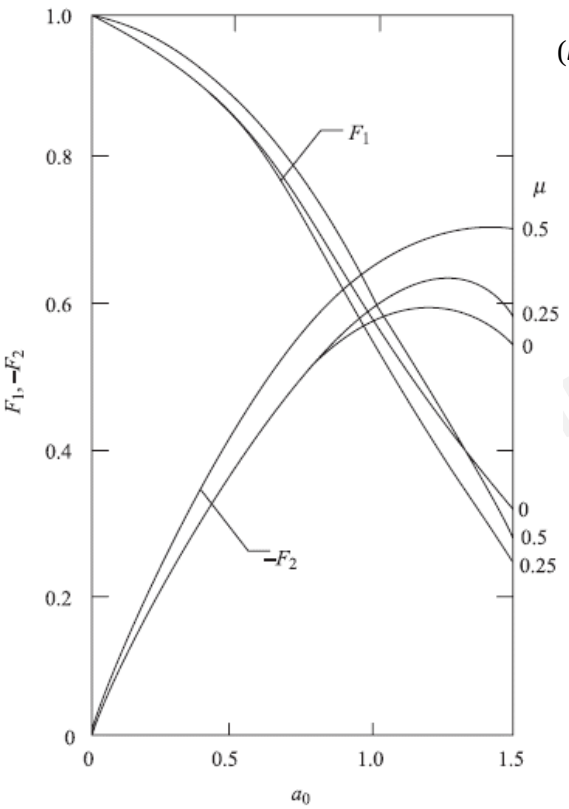
با جایگذاری در رابطه استار داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} & m\ddot{z} + c_z \dot{z} + k_z z = Q \;** \\ & k_z = \left(Gr_0\right)\left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}\right), \quad c_z = \left(\frac{Gr_0}{\omega}\right)\left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}\right) \end{aligned}}$$

با حل رابطه دو استار با مشخص بودن مقادیر سختی و میرایی وابسته به فرکانس و فراسنج های شعاع شالوده مدول سختی خاک و ضریب پواسون و همچنین معلوم بودن جرم شالوده می توان میزان جابجایی که همان جواب خصوصی معادله دیفرانسیل درجه دوم است را تعیین کرد.

راه حل های مشابه، برای ارتعاش عمودی شالوده ها:

۱- روش حسیه (*Hsieh's Analog*) ۲- روش لایسمر (***Lysmer's Analog***)



۱- روش لایسمر (*Lysmer's Analog*):

درسال ۱۹۶۶ لایسمر و ریچارت (Lysmer and Richart (1966)) مدل ساده ای را برای محاسبه مقادیر k_z و c_z ارائه نمودند. آنها علاوه بر آن تعریف جدیدی از توابع جابجایی بصورت مقابل ارائه کردندکه تقریبا وابسته به ضریب پواسون نمی باشد (مطابق با شکل روبرو).

$$F=\frac{f}{\left(\frac{1-\mu}{4}\right)}=\frac{f_1+if_2}{\left(\frac{1-\mu}{4}\right)}=F_1+iF_2$$

همچنین در این روش ضریب جرم نیز مقابل اصلاح گردید::

$$B_z=\left(\frac{1-\mu}{4}\right)b=\left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{m}{\rho r_0^3}\right)$$

در این روش برای تحلیل معادله حرکت، مقادیر k_z و c_z بصورت روابط زیر پیشنهاد شد که این مقادیر بر خلاف روش حسیه مستقل از فرکانس ماشین هستند.

$$m\ddot{z}+c_z\dot{z}+k_z z=Q_0e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad c_z=\frac{3.4r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho}, \qquad k_z=\frac{4Gr_0}{1-\mu}$$

روش گام به گام پاسخ پی تحت ارتعاش عمودی از روش لایسمر:

گام الف-تعیین فرکانس طبیعی، ضریب میرایی و فرکانس تشدید

گام ب- تعیین دامنه ارتعاش در زمان تشدید

گام ج- تعیین دامنه ارتعاش در فرکانسهایی مختلف

$$m\ddot{z}+c_z\dot{z}+k_z z=Q_0e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad c_z=\frac{3.4r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho}, \qquad k_z=\frac{4Gr_0}{1-\mu}$$

گام الف-تعیین فرکانس طبیعی، ضریب میرایی و فرکانس تشدید:

۱) محاسبه فرکانس طبیعی:

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_z}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right)\frac{1}{m}}$$

۲) محاسبه ضریب میرایی:

$$c_{cz}=2\sqrt{k_z m}=2\sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right)m}=\frac{8r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho B_z}$$

$$B_z=\left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{m}{\rho r_0^3}\right)\Rightarrow m=4B_z\left(\frac{\rho r_0^3}{1-\mu}\right)$$

$$D_z=\frac{c_z}{c_{cz}}=\frac{\frac{3.4r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho}}{\frac{8r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho B_z}}=\frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$$

۳) محاسبه فرکانس تشدید:

برای ارتعاش یک درجه آزادی

$$f_m=f_n\sqrt{1-2D_z^2}=\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right)\frac{1}{m}}\right]\sqrt{1-2\left(\frac{0.425}{\sqrt{B_z}}\right)^2}$$

$$f_m\approx\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{B_z-0.36}{B_z}}\quad \textbf{for}\quad B_z\geq 0.3$$

برای ارتعاش با جرم دورانی

$$f_m=\frac{f_n}{\sqrt{1-2D_z^2}}=\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right)\frac{1}{m}}\right]\Big/\sqrt{1-2\left(\frac{0.425}{\sqrt{B_z}}\right)^2}$$

$$f_m\approx\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\left(\frac{1}{r_0}\right)\sqrt{\frac{0.9}{B_z-0.45}}$$

Ali Asgari PhD in Geotechnics

روش گام به گام پاسخ پی تحت ارتعاش عمودی از روش لایسمر:

$$m\ddot{z} + c_z\dot{z} + k_z z = Q_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad c_z = \frac{3.4r_0^2}{1-\mu}\sqrt{G\rho}, \qquad k_z = \frac{4Gr_0}{1-\mu}$$

گام الف-تعیین فرکانس طبیعی، ضریب میرایی و فرکانس تشدید

گام ب- تعیین دامنه ارتعاش در زمان تشدید

گام ج- تعیین دامنه ارتعاش در فرکانسهایی مختلف

گام ب- تعیین دامنه ارتعاش در زمان تشدید

از فصل دوم داریم:

برای ارتعاش یک درجه آزادی

$$A_{z(\text{resonance})} = \left(\frac{Q_0}{k_z}\right)\left(\frac{1}{2D_z\sqrt{1-D_z^2}}\right) = \frac{Q_0(1-\mu)}{4Gr_0}\frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z-0.18}}$$

برای ارتعاش با جرم دورانی

$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{U}{m}\left(\frac{1}{2D_z\sqrt{1-D_z^2}}\right) = \frac{m_1 e}{m}\frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z-0.18}}$$

گام ج- تعیین دامنه ارتعاش در فرکانسهایی مختلف

برای ارتعاش یک درجه آزادی

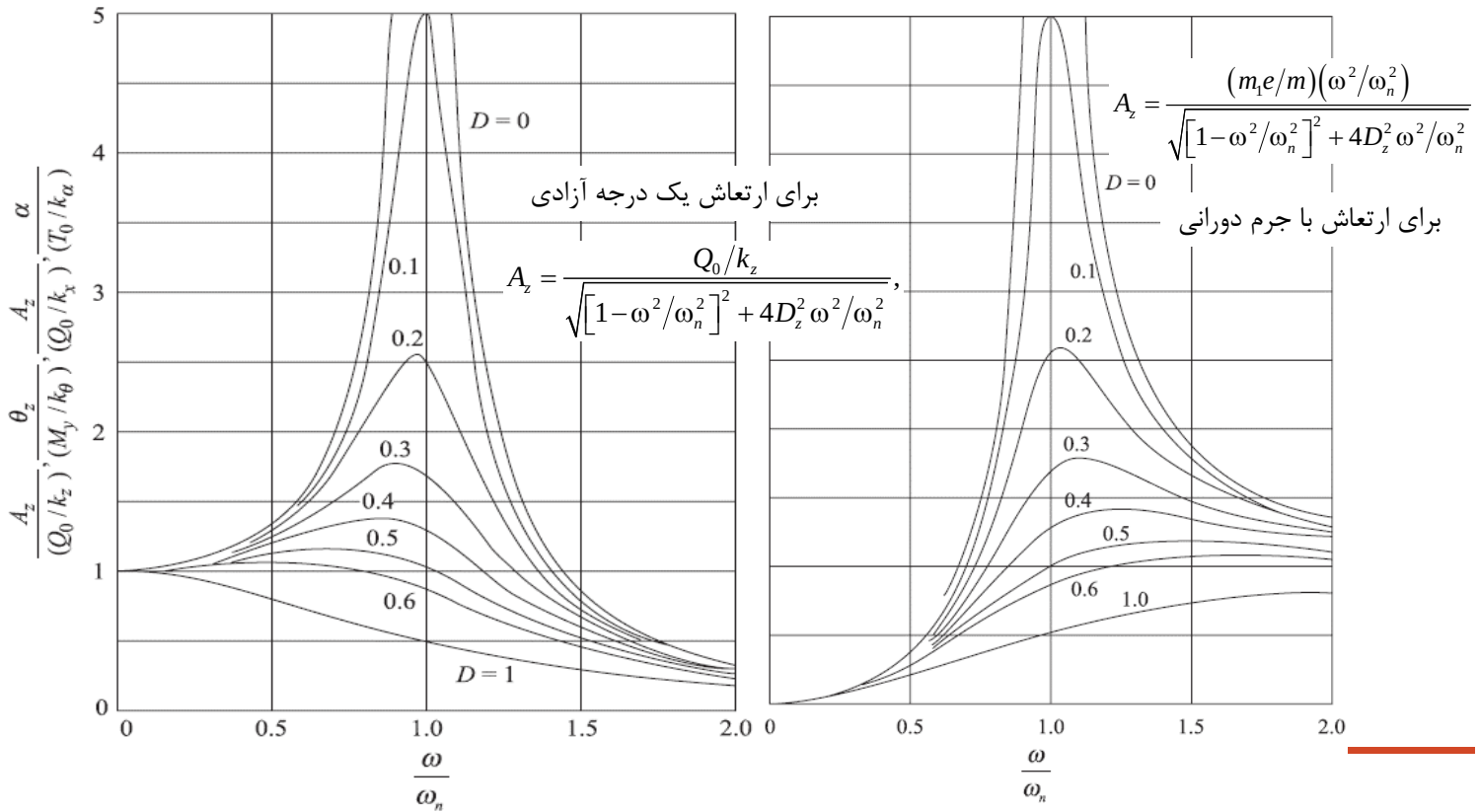
$$A_z = \frac{Q_0/k_z}{\sqrt{\left[1-\omega^2/\omega_n^2\right]^2 + 4D_z^2\omega^2/\omega_n^2}}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$$

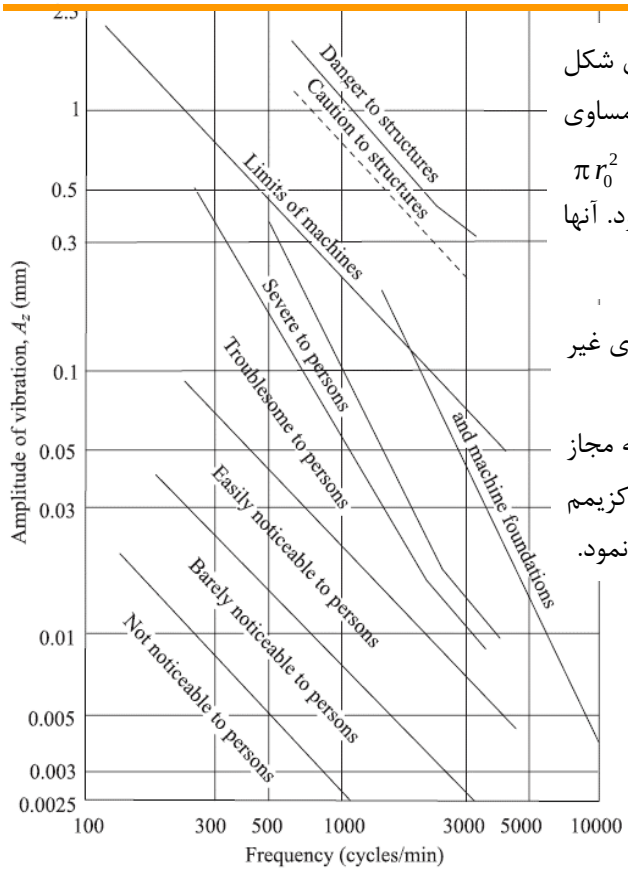
برای ارتعاش با جرم دورانی

$$A_z = \frac{(m_1 e/m)(\omega^2/\omega_n^2)}{\sqrt{\left[1-\omega^2/\omega_n^2\right]^2 + 4D_z^2\omega^2/\omega_n^2}}$$

Ali Asgari, PhD in Geotechnics

بجای فرمول ها، طبق نمودار زیر با داشتن مقادیر سختی، میرایی و دامنه بار ، مقدار دامنه ارتعاش قابل محاسبه می باشد:





این روش ها فقط مربوط به پی های دایروی با شعاع r_0 می باشند. اگر پی ما دارای شکل مستطیلی به ابعاد B و L باشد بایستی شعاع دایره ی متناظر با این پی را طبق مساوی قرار دادن مساحت ها محاسبه نماییم.

$$\pi r_0^2 = BL \qquad r_0 = \sqrt{BL/\pi}$$

دوبری و گزتاس نشان دادند که هر شکلی می تواند به صورت دایره ای معادل شود. آنها صحت این موضوع را با انجام آزمایشات نشان دادند.

کاملا واضح می باشد که حذف ارتعاش در نزدیک فرکانس طبیعی یک شالوده کاری غیر ممکن می باشد اما می توانیم با انجام تمهیداتی، ارتعاش را تا حد امکان تقلیل دهیم.

ریچارت(1962) Richart نموداری مطابق شکل روبرو برای تعیین ماکزیمم دامنه مجاز ارتعاشات قائم برای فرکانس های عملی ارائه کرد. از این نمودار می توان شتاب ماکزیمم مجاز پی را نیز بر اساس دامنه ارتعاش عمودی پی با استفاده از رابطه ی زیر محاسبه نمود.

$$\text{Maximum acceleration} = (\text{maximum displacement})\omega^2$$

به عنوان مثال، شتاب ماکزیمم مجاز دستگاهی که فرکانس آن ۲۰۰۰ دور بر دقیقه (cpm) است مطابق زیر محاسبه می شود:

$$(0.127\,\text{mm})\left[\frac{(2\pi)(2000)}{60}\right]^2 = 5570\,\text{mm/s}^2$$

در طراحی پی ها، برای جلوگیری از رخداد تشدید احتمالی نکات زیر باید مورد توجه قرار گیرد :

- نسبت فرکانس تشدید (طبیعی) سیستم خاک و پی به فرکانس دستگاه در ماشین های سرعت بالا (با فرکانس های بیش از ۱۰۰۰ دور بر دقیقه (cpm)) باید کمتر از نیم (۰.۵) باشد. چه در هنگام شروع به کار و چه در هنگام ایستادن، کمتر باشد.

$$\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} \le 0.5$$

- برای ماشین های با سرعت پایین(۳۵۰ تا ۴۰۰ دور بر دقیقه)، فرکانس تشدید سیستم خاک و پی (فرکانس طبیعی)، حداقل باید دوبرابر فرکانس ماشین باشد.

$$\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} \ge 2$$

- در انواع پی ها، با افزایش وزن، فرکانس تشدید کاهش خواهد یافت.
- با افزایش r_0 فرکانس تشدید پی افزایش می یابد.
- با افزایش مدول برشی خاک(به طور مثال با تزریق کردن دوغاب به خاک)، فرکانس تشدید پی افزایش می یابد.

$$f_m \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{B_z - 0.36}{B_z}}$$

Ali Asgari, PhD in Geotechnics

مثال ۱) فونداسیونی تحت ارتعاش عمودی نیروی ثابتی قرار گرفته است. وزن کل فونداسیون و ماشین $W = 680\ \text{kN}$ می باشد. طول و عرض فونداسیون به ترتیب برابر است با ۶ و ۲ متر. دامنه نیروی ارتعاشی برابر است با $Q_0 = 7\ \text{kN}$ فرکانس سیستم برابر با $180cpm$ می باشد. پارامترهای خاک عبارتند از: $\gamma = 18.5\ \text{kN/m}^3$, $\mu = 0.4$, $G = 20700\ \text{kPa}$ مطلوب است محاسبه :

الف) فرکانس تشدید و نسبت $\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} \geq 2$ را بررسی کنید

ب) دامنه ارتعاش در حالت تشدید

حل: ابتدا شعاع معادل را محاسبه می نماییم:

$$r_0 = \sqrt{BL/\pi} = \sqrt{2\times 6/\pi} = 1.954m$$

ضریب جرم برابر است با:

$$B_z = \left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{m}{\rho r_0^3}\right) = \left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{W}{\gamma r_0^3}\right) = \left(\frac{1-0.4}{4}\right)\left(\frac{680}{18.5\times(1.954)^3}\right) = 0.739$$

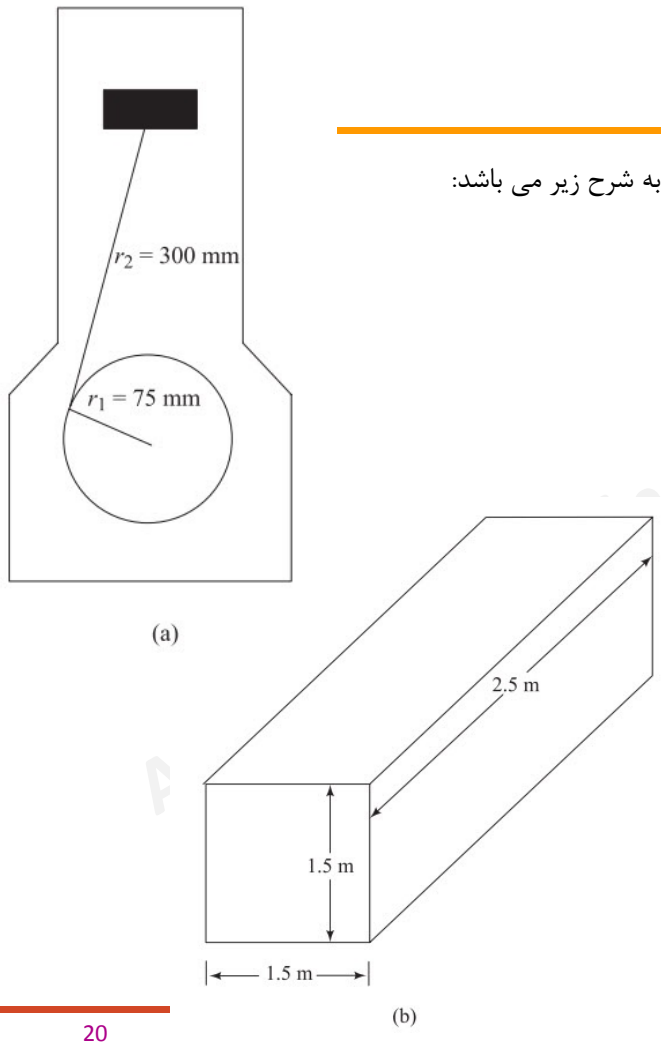
الف- فرکانس تشدید از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$f_m \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{B_z-0.36}{B_z}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20700}{18.5/9.81}}\left(\frac{1}{1.954}\right)\sqrt{\frac{0.739-0.36}{0.739}} = 6.11\mathbf{Hz} = 366.6\mathbf{cpm}$$

ب) دامنه ارتعاش در حالت تشدید:

$$\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} = \frac{366.6}{180} = 2.04 \geq 2 \quad \textbf{O.K.}$$

$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{Q_0(1-\mu)}{4Gr_0}\frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z-0.18}} = 0.00003m = 0.03\mathbf{mm}$$



مثال ۲) شکل a مربوط به پیستون یک موتور است. اطلاعات این دستگاه به شرح زیر می باشد:

فرکانس ماشین: $1500cpm$

طول میله اتصال: $r_2 = 0.3m$

شعاع میل لنگ: $r_1 = 75mm$

وزن کل پیستون: $W_{rec} = 54N$

وزن کل دستگاه: $14KN$

شکل b ابعاد شالوده ی بتنی دستگاه را نمایش می دهد.

خصوصیات خاک به شرح زیر می باشد:

$$\gamma = 18.5\frac{kN}{m^3} \text{ ، } G = 18000kPa \text{ ، } \mu = 0.5$$

مطلوب است:

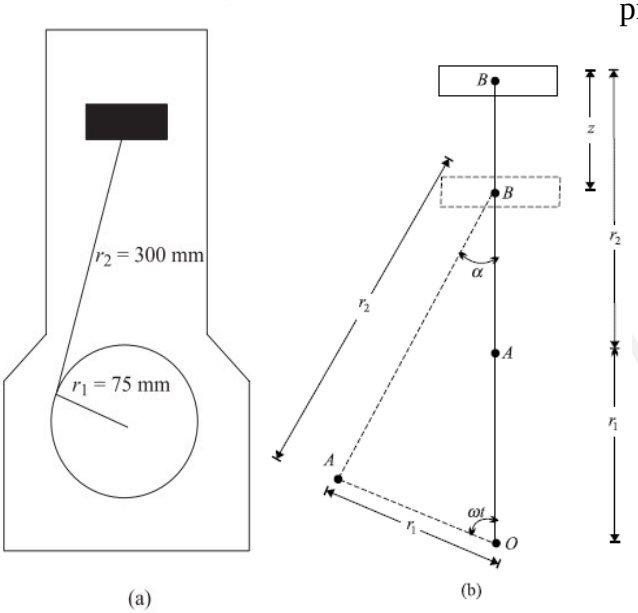
الف) نیروهای نامتعادل اولیه و ثانویه(primary & secondary unbalanced forces) در فرکانس عملکردی.

ب) فرکانس تشدید

پ) دامنه ارتعاش قائم در حالت تشدید

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}+\dots$$

حل الف) محاسبه نیروهای نامتعادل اولیه و ثانویه(primary & secondary unbalanced forces) در فرکانس عملکردی.



اگر سرعت دورانی میل لنگ برابر با ω فرض شود، در زمان $t=0$ فاصله قائم بین دو نقطه O و B برابر با r_1+r_2 است. در زمان t ، فاصله قائم بین دو نقطه O و B برابر با r_1+r_2-z است. همچنین با توجه به شکل مقابل داریم.

$$z=(r_1+r_2)-(r_2\cos\alpha+r_1\cos\omega t),$$

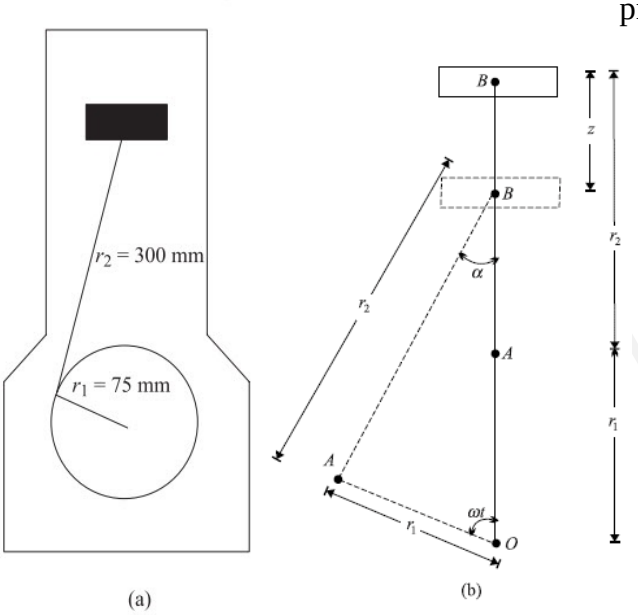
$$r_2\sin\alpha=r_1\sin\omega t \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\frac{r_1}{r_2}\sin\omega t$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\sin^2\omega t}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\sin^2\omega t$$

$$z=(r_1+r_2)-(r_2\cos\alpha+r_1\cos\omega t)=r_2(1-\cos\alpha)+r_1(1-\cos\omega t)=r_2\left(1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\sin^2\omega t\right)+r_1(1-\cos\omega t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\sin^2\omega t+r_1(1-\cos\omega t)\xrightarrow{\sin^2\omega t=\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)} z=\frac{1}{4}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)(1-\cos 2\omega t)+r_1(1-\cos\omega t)$$

حل الف) محاسبه نیروهای نامتعادل اولیه و ثانویه(primary & secondary unbalanced forces) در فرکانس عملکردی.



بنابراین جابجایی پیستون در هر زمان از رابطه زیر تعیین می شود:

$$z=\left(\frac{1}{4}\frac{r_1^2}{r_2}+r_1\right)-\frac{1}{4}\frac{r_1^2}{r_2}\cos 2\omega t-r_1\cos\omega t$$

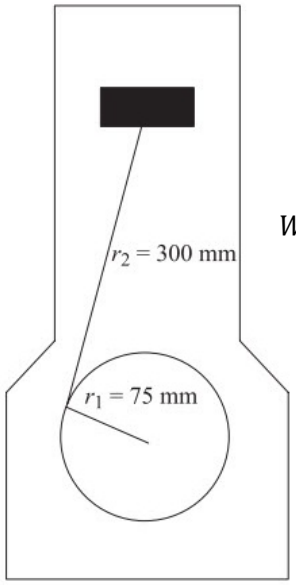
با دو بار مشتق گیری از جابجایی پیستون بر حسب زمان، تابع شتاب پیستون بدست می آید:

$$\ddot{z}=r_1\omega^2\left(\cos\omega t+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos 2\omega t\right)$$

اگر جرم پیستون برابر m_{rec} باشد در نتیجه می توان نیروی اینرسی این پیستون را محاسبه کرد:

$$F=m\ddot{z}=m_{rec}r_1\omega^2\cos\omega t+m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega^2\cos 2\omega t=F_1+F_2 \;\Rightarrow F_1=m_{rec}r_1\omega^2\cos\omega t,\quad F_2=m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega^2\cos 2\omega t$$

$$F_{\max(1)}=m_{rec}r_1\omega^2,\quad F_{\max(2)}=m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)F_{\max(1)}$$



(a)

فرکانس ماشین: $1500cpm$

وزن کل پیستون: $W_{rec} = 54N$

وزن کل دستگاه: $14KN$

حل مثال:

الف) نیروهای نامتعادل اولیه و ثانویه پیستون طبق روابط زیر محاسبه می شوند:

$$F_{\max(1)} = m_{rec} r_1 \omega^2 = \frac{54}{(1000)(9.81)}\left(\frac{75}{1000}\right)\left(\frac{2\pi \times 1500}{60}\right)^2 = \mathbf{10.187\ kN}$$

$$F_{\max(2)} = m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)F_{\max(1)} = \left(\frac{0.075}{0.3}\right)F_{\max(1)} = (0.25)\times 10.19 = \mathbf{2.547\,kN}$$

$$F_{\max} = F_{\max(1)} + F_{\max(2)} = 10.187 + 2.547 = \mathbf{12.73\ kN}$$

ب) طبق مطالب گفته شده ابتدا شعاع معادل پی دایره ای را محاسبه می نماییم:

$$r_0 = \sqrt{BL/\pi} = \sqrt{1.5\times 2.5/\pi} = 1.093m$$

محاسبه ضریب جرم با فرض وزن مخصوص $23.58\frac{kN}{m^3}$ برای بتن:

$$W = V_c \times \gamma_c = 1.5\times 2.5\times 1.5\times(23.58) = 146.64,$$

فرکانس تشدید برابر است با:

$$B_z = \left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{W}{\gamma r_0^3}\right) = \left(\frac{1-0.4}{4}\right)\left(\frac{146.64}{18.5\times(1.093)^3}\right) = 0.759$$

$$f_m \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{0.9}{B_z - 0.45}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{18000}{18.5/9.81}}\left(\frac{1}{1.093}\right)\sqrt{\frac{0.9}{0.759-0.45}} = 24.28\mathbf{cps}$$

حل پ)

$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{U}{m}\left(\frac{1}{2D_z\sqrt{1-D_z^2}}\right) = \frac{m_1 e}{m}\frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z - 0.18}}$$

در $1500cpm$ ، نیروی نا متعادل کلی در اسلاید قبل از مجموع دو نیروی اولیه و ثانویه به دست آمد. برای تعیین این نیرو در فرکانس تشدید(1457cpm) را نیز می توان تعیین کرد:

$$F_{(1500\text{cpm})} = F_{\max(1)} + F_{\max(2)} = m_{rec} r_1 \omega^2 + m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega^2$$

$$= \frac{54}{(1000)(9.81)}\left(\frac{75}{1000}\right)\left(\frac{2\pi\times 1500}{60}\right)^2 + \frac{54}{(1000)(9.81)}\left(\frac{(75/1000)^2}{300/1000}\right)\left(\frac{2\pi\times 1500}{60}\right)^2 = \mathbf{12.73\ kN}$$

$$F_{(1457\text{cpm})} = m_{rec} r_1 \omega_1^2 + m_{rec}\left(\frac{r_1^2}{r_2}\right)\omega_1^2$$

$$= \frac{54}{(1000)(9.81)}\left(\frac{75}{1000}\right)\left(\frac{2\pi\times 1457}{60}\right)^2 + \frac{54}{(1000)(9.81)}\left(\frac{(75/1000)^2}{300/1000}\right)\left(\frac{2\pi\times 1457}{60}\right)^2 = \mathbf{12.014\ kN}$$

$$\textbf{or: } F_{(\omega_1)} = F_{(\omega_2)}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = 12.73\left(\frac{1457}{1500}\right)^2 = \mathbf{12.014\ kN} \Rightarrow F_{(\omega_1)} = Q_0 = m_1 e\omega_1^2 \Rightarrow m_1 e = \frac{Q_0}{\omega_1^2} = \frac{12.014}{(2\pi\times 1457/60)^2} = 0.0005161$$

در نتیجه :

$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{0.0005161}{146.6/9.81}\frac{0.759}{0.85\sqrt{0.759-0.18}} = 4.05\times 10^{-5}\ \text{m} = \mathbf{0.0405mm}$$

Ali Asgari, PhD in Geotechnics