رابطه مهم:
$$\boxed{\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}}$$
تابع موج در فضای مکان

طرفین رابطه فوق را در $e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}$ ضرب می‌کنیم و بر روی فضای x انتگرال‌گیری می‌کنیم

$$\int \psi(x)\,e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\int dx\,\phi(p)\,e^{\frac{i(p-p')x}{\hbar}}$$

$$\int \psi(x)\,e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi(p)\;2\pi\hbar\,\delta(p-p')$$

$$\int \psi(x)\,e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\;2\pi\hbar\;\phi(p')$$

رابطه مهم:
$$\boxed{\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\,\psi(x)\,e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}$$
تابع موج در فضای تکانه

به یاد داریم که مجموع احتمالات باید برابر با یک باشد. حال می‌نویسیم:

$$\int dp\,\phi^*(p)\,\phi(p)=\int dp\,\phi^*(p)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\,\psi(x)\,e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$=\int dx\,\psi(x)\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\,\phi^*(p)\,e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\psi^*(x)}$$

$$=\int dx\,\psi(x)\,\psi^*(x)=\int dx\,|\psi(x)|^2=\overbrace{\int dx\,P(x)=1}^{\text{می‌دانیم:}}$$

مجموع احتمالات باید برابر با یک باشد

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\int \psi^* \psi \, dx = 1 \quad , \quad \int \phi(p)\, \phi^*(p)\, dp = 1$$

قضیه پارسوال در ریاضیات: اگر تابعی به یک بهنجار شده باشد، تبدیل فوریه آن نیز چنین است.

حال $\langle p \rangle$ را یادآوری می‌کنیم:

$$\langle p \rangle = \int dx\, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$= \int dx\, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$= \int dp\, \phi(p) \frac{\hbar}{i} \frac{i\,p}{\hbar} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \psi^*(x)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}}_{\phi^*(p)}$$

$$= \int dp\, \phi(p)\, p\, \phi^*(p)$$

اگر بخواهیم مقدار چشمداشتی عملگر تکانه را در فضای تکانه به دست آوریم، یعنی اگر بخواهیم با داشتن $\phi(p)$، $\langle p \rangle$ را بیابیم از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\langle p \rangle = \int dp\, \phi(p)\, p\, \phi^*(p) = \int dp\, \phi^*(p)\, p\, \phi(p) .$$

مهم:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \phi^*(p)\, \phi(p) = 1\\[2em]&\langle p\rangle = \int dp\, \phi(p)\, p\, \phi^*(p)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

با مشاهده این روابط، می‌توان $\phi(p)$ را به عنوان تابع موج در فضای تکانه تعبیر کرد

$$\Downarrow$$

$|\phi(p)|^2$ چگالی احتمال یافتن ذره با تکانه p می‌باشد.

$|\phi(p)|^2 dp$ احتمال آنکه از اندازه‌گیری تکانه ذره، مقداری در همسایگی dp حول p به دست آید.

سؤال: آیا می‌توانید چگونگی عملگر x را در فضای تکانه بیابید؟

می‌دانیم $\quad \langle x\rangle = \int dx\, \psi(x)\, x\, \psi^*(x)$

$$= \int dx\, \psi(x)\, x\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\psi^*(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p) \int dx\, \psi(x)\, x\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p) \int dx\, \psi(x)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$= \int dp\, \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \psi(x)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\phi(p)} =$$

$$= \int dp\, \phi^*(p)\; i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\; \phi(p)$$

بنابراین از $\langle x \rangle$ درفضای تکان به عبارت مهم زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\langle x \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \phi(p).}$$

آشکارا می‌توان دریافت که عملگر x در فضای تکانه معادل با $i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ است

$$\boxed{x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}}$$

مقدار چشمداشتی هر تابع دلخواهی از x مثل $f(x)$ عبارت است از

$$\langle f(x) \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\; f\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \phi(p).$$

$$\langle x^2 \rangle = \int dp\, \phi^*(p) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \phi(p)$$

$$\langle x^3 \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right)^3 \phi(p)$$

چنانچه بخواهیم درفضای تکانه و با استفاده از تابع موج درفضای تکانه، مقادیر چشمداشتی عملگر x و یا توابعی از x را بیابیم، می‌توانیم از روابط فوق استفاده کنیم.

جمع بندی :

عملگر x و عملگر تکانه P را در نظر بگیرید.

عملگر x در فضای تکانه و برحسب تکانه بصورت $x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ عمل می کند.

عملگر P در فضای مکان و برحسب مکان بصورت $P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ عمل می کند.

مقدار چشمداشتی x در فضای مکان $\langle x\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, x\, \psi(x)$

مقدار چشمداشتی x در فضای تکانه $\langle x\rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\, \phi(p)$

حال برای تابع دلخواهی از x می توانیم روابط مفید زیر را بنویسیم:

$$\langle f(x)\rangle = \int dx\, \psi^*(x) f(x) \psi(x) \quad \text{و} \quad \langle f(x)\rangle = \int dp\, \phi^*(p) f\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \phi(p).$$

مقدار چشمداشتی P در فضای تکانه $\langle p\rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, p\, \phi(p)$

مقدار چشمداشتی P در فضای مکان $\langle p\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\, \psi(x)$

حال برای تابعی دلخواهی از P مثل $f(p)$ می توانیم روابط مفید زیر را بنویسیم:

$$\langle f(p)\rangle = \int dp\, \phi^*(p) f(p) \phi(p) \quad \text{و} \quad \langle f(p)\rangle = \int dx\, \psi^*(x) f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)$$