رابطه مهم: $\boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}}$ تابع موج در فضای مکان

در این رابطه فوق را در $e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}$ ضرب می‌کنیم و بر روی فضای $x$ انتگرال‌گیری می‌کنیم

$$\int \psi(x)\, e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \int dx\, \phi(p)\, e^{\frac{i(p-p')x}{\hbar}}$$

$$\int \psi(x)\, e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi(p)\, 2\pi\hbar\, \delta(p-p')$$

$$\int \psi(x)\, e^{\frac{-ip'x}{\hbar}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, 2\pi\hbar\, \phi(p')$$

رابطه مهم: $\boxed{\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \psi(x)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}$ تابع موج در فضای تکانه

به یاد داریم که مجموع احتمالات باید برابر با یک باشد. حال می‌نویسیم:

$$\int dp\, \phi^*(p)\, \phi(p) = \int dp\, \phi^*(p)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \psi(x)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$= \int dx\, \psi(x)\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\psi^*(x)}$$

$$= \int dx\, \psi(x)\, \psi^*(x) = \int dx\, |\psi(x)|^2 = \overbrace{\int dx\, P(x) = 1}^{\text{می‌دانیم}}$$

مجموع احتمالات باید برابر با یک باشد

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\int \psi^* \psi \, dx = 1 \quad , \quad \int \phi(p) \, \phi^*(p) \, dp = 1$$

قضیه پارسوال در ریاضیات: اگر تابعی به یک بجنجار شده باشد، تبدیل فوریه آن نیز چنین است.

حال $\langle p \rangle$ را یادآوری می‌کنیم:

$$\langle p \rangle = \int dx \, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$= \int dx \, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, \phi(p) \, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$= \int dp \, \phi(p) \frac{\hbar}{i} \frac{i}{\hbar} p \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, \psi^*(x) \, e^{\frac{ipx}{\hbar}}}_{\phi^*(p)}$$

$$= \int dp \, \phi(p) \, p \, \phi^*(p)$$

اگر بخواهیم مقدار چشمداشتی عملگر تکانه را در فضای تکانه به دست آوریم، یعنی اگر بخواهیم با داشتن $\phi(p)$، $\langle p \rangle$ را بیابیم از رابطه زیر استفاده می‌شود.

مهم: $$\langle p \rangle = \int dp \, \phi(p) \, p \, \phi^*(p) = \int dp \, \phi^*(p) \, p \, \phi(p).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \phi^*(p)\, \phi(p) = 1$$

$$\langle p \rangle = \int dp\, \phi(p)\, p\, \phi^*(p)$$

$\Longrightarrow$ با مشاهده این روابط، می‌توان $\phi(p)$ را به عنوان تابع موج در فضای تکانه تعبیر کرد

$\Downarrow$

$|\phi(p)|^2$ چگالی احتمال یافتن ذره با تکانه $p$ می‌باشد.

$|\phi(p)|^2 dp$ احتمال آنکه از اندازه‌گیری تکانه ذره، مقداری در همسایگی $dp$ حول $p$ به دست آید.

سؤال: آیا می‌توانید چشداشتی عملگر $x$ را در فضای تکانه بیابید؟

می‌دانیم $\langle x \rangle = \int dx\, \psi(x)\, x\, \psi^*(x)$

$$= \int dx\, \psi(x)\, x\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\psi^*(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p) \int dx\, \psi(x)\, x\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, \phi^*(p) \int dx\, \psi(x)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

$$= \int dp\, \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \psi(x)\, e^{\frac{-ipx}{\hbar}}}_{\phi(p)} =$$

$$= \int dp\, \phi^*(p)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\, \phi(p)$$

بنابراین از $\langle x \rangle$ در فضای تکانه به عبارت مهم زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\langle x \rangle = \int dp\, \phi^*(p) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p).}$$

آشکار می‌توان دریافت که عملگر $x$ در فضای تکانه معادل با $i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ است

$$\boxed{x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}}$$

مقدار چشمداشتی هر تابع دلخواهی از $x$ مثل $f(x)$ عبارت است از

$$\langle f(x) \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, f\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \phi(p).$$

$$\langle x^2 \rangle = \int dp\, \phi^*(p) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \phi(p)$$

$$\langle x^3 \rangle = \int dp\, \phi^*(p) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right)^3 \phi(p)$$

چنانچه بخواهیم در فضای تکانه و با استفاده از تابع موج در فضای تکانه، مقادیر چشمداشتی عملگر $x$ و یا توابعی از $x$ را بیابیم، می‌توانیم از روابط فوق استفاده کنیم.

جمع بندی :

عملگر $x$ و عملگر تکانه $p$ را در نظر بگیرید.

عملگر $x$ در فضای تکانه و برحسب تکانه به صورت $x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ عمل می کند.

عملگر $p$ در فضای مکان و برحسب مکان به صورت $p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ عمل می کند.

مقدار چشمداشتی $x$ در فضای مکان $\langle x \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, x\, \psi(x)$

مقدار چشمداشتی $x$ در فضای تکانه $\langle x \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\, \phi(p)$

حال برای تابع دلخواهی از $x$ می توانیم روابط مفید زیر را بنویسیم:

$$\langle f(x) \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, f(x)\, \psi(x) \quad \text{و} \quad \langle f(x) \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, f\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \phi(p).$$

مقدار چشمداشتی $p$ در فضای تکانه $\langle p \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, p\, \phi(p)$

مقدار چشمداشتی $p$ در فضای مکان $\langle p \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\, \psi(x)$

حال برای تابعی دلخواهی از $p$ مثل $f(p)$ می توانیم روابط مفید زیر را بنویسیم:

$$\langle f(p) \rangle = \int dp\, \phi^*(p)\, f(p)\, \phi(p) \quad \text{و} \quad \langle f(p) \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, f\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)$$