به نام آنکه جان را فکرت آموخت

دانشگاه مازندران
دانشکده فنی و مهندسی- گروه عمران-گرایش مکانیک خاک وپی

موضوع درس:

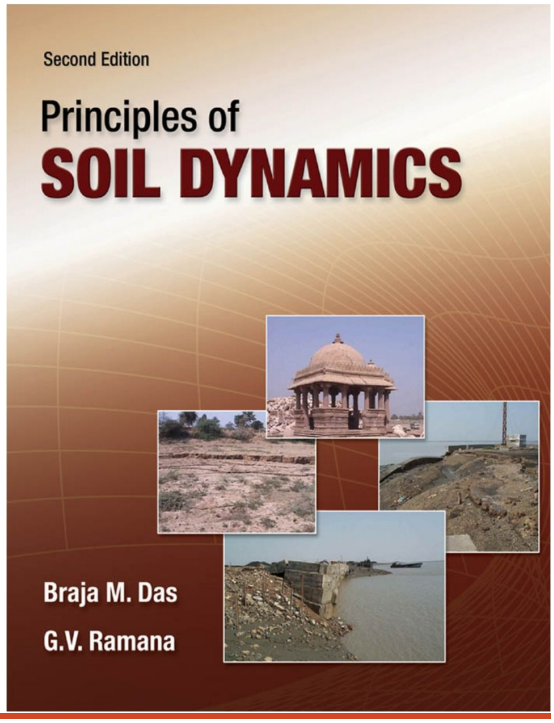
دینامیک خاک(Soil Dynamics)

مدرس: علی عسگری (Ali Asgari)

نیمسال دوم تحصیلی ۹۴-۹۵

مراجع مهم دینامیک خاک (Soil Dynamics)

- Braja M. Das and G.V. Ramana, *Principles of Soil Dynamics*, Second Edition, , Cengage Learning, 2011.
- Braja M. Das and Zhe Luo, *Principles of Soil Dynamics*, third Edition, Cengage Learning, 2016.
- Kramer, Steven L. *Geotechnical earthquake engineering*. Pearson Education India, 1996.
- Verruijt, Arnold. *An introduction to soil dynamics*. Vol. 24. Springer Science & Business Media, 2009.



دینامیک خاک (Soil Dynamics)

جزئیات سرفصل و تمرین های درس دینامیک خاک

- از کتاب داس گفته می شود و بخش های ۲-۹ و ۲-۱۱ حذف است. تمرینهای شماره زوج حل شود.
- تمام فصل ارائه می شود. تمرینی ندارد.
- تمام فصل ارائه می شود. تمرینهای شماره ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۰، ۱۶، ۱۹ و ۲۰ حل شود.
- از اول بخش ۱-۵ تا اول بخش ۵-۵ تدریس می شود. تمرینهای شماره ۲، ۳، ۴ و ۶ حل شود.
- از کتاب داس بطور کامل گفته می شود. تمرینهای شماره فرد حل شود.
- فصل هفتم از کتاب کرامر تدریس می شود و بخشی از داس گفته می شود. تمرین، بصورت یک پروژه ساده است.
- بخشهای ۱-۸، ۲-۸، ۳-۸، ۴-۸، ۸-۸، ۹-۸، ۱۰-۸، ۱۱-۸، ۱۲-۸ ارائه می شود. تمرینات ۲، ۳، ۴، ۱۰ حل شود.
- فصل ۹ برای مطالعه آزاد است.
- تمام فصل ارائه می شود. تمرینهای شماره ۱، ۲، ۶، ۸، ۹ و ۱۱ حل شود.
- فصل ۱۱ برای مطالعه آزاد است.
- بحث مهمی است و اگر وقت شد گفته می شود.

مقدمه و کلیات
تئوری ارتعاشات
امواج در محیط های . . .
خصوصیات دینامیکی . . .
ارتعاشات شالوده و پی
ظرفیت باربری دینامیکی
پاسخ لرزه ای زمین
فشارلرزه ای جانبی خاک
تراکم دینامیکی . . .
روانگرایی
ماشین مرتعش برروی شمع
پایداری لرزه ای شیروانی

پروژه و ارزشیابی درس دینامیک خاک

- پروژه:

۱- پاسخ لرزه ای زمین ۲- روش های مقابله با روانگرایی ۳- شبیه سازی یک الگوی عددی به صورت دینامیکی

- ارزشیابی

- میان ترم ۴ نمره
- پایان ترم ۱۰ نمره
- تمرینها ۲ نمره
- پروژه اجباری ۲.۵ نمره
- ارائه در کلاس از یکی از سرفصل ها ۲.۵ نمره
- حضور و غیاب ۰.۵ نمره

- نکته مهم: ارزشیابی ممکن است با تغییرات همراه باشد.

مقدمه و کلیات

انواع بارها: بارهای استاتیک و بارهای دینامیک

بارهای استاتیک بنا به فرض، بارهایی هستند که با زمان تغییر نمی‌کنند. بارهای دینامیک، بارهایی هستند که با زمان تغییر می‌کنند.

نیروی دینامیکی

بهترین تعریف برای یک نیروی دینامیکی در کتاب Lambe & Witman آورده شده است که می‌گوید: اگر نیروهایی که به جرم (خاک) وارد می‌شوند به آن اندازه سریع تغییر کنند که نیروهای اینرسی (شتاب) چشمگیر ومؤثر گردند و در معادلات تعادل تأثیرگذارند، آن‌گاه به آن نیروها، نیروهای دینامیک می‌گوییم.

مقدمه و کلیات

نیروهای دینامیک در خاک

همانند زلزله، کوبش شمع‌ها، پی ماشین‌آلات مرتعش، ترافیک سریع روی جاده، باد و موج.

شدت نیروهای دینامیکی

شدت نیروهایی که به نیروهای دینامیکی تبدیل می‌شوند بستگی به اندازه جرم خاک دارد مثلا در نمونه‌های آزمایشگاهی نیروهای اینرسی وقتی چشمگیر می‌شوند که فرکانس ارتعاش به ۲۵Hz برسد اما از طرف دیگر برای یک جرم بسیار بزرگ از خاک همانند یک جسم سرخاکی نیروهای اینرسی در فرکانس‌های پایین‌تر از ۵/۰Hz نیز مؤثر می‌شوند.

زلزله به عنوان مهم‌ترین منبع نیروی دینامیکی:

- نشت زیادی (بار سیکلی و شکست)
- روانگرایی و شناور شدن ساختمانها

معیار طرح پی های مرتعش:

-دامنه مجاز حرکت

-حداکثر نیروی دینامیکی

مقدمه و کلیات

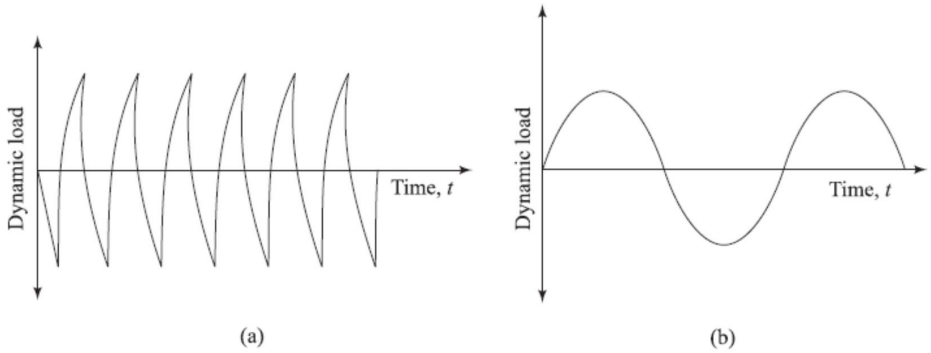
انواع بارهای دینامیک

با مطالعه منابع و مراجع مختلف پی به اختلافاتی در زمینه تعریف انواع بارهای دینامیکی برمی‌خوریم که بعضا ناصحیح و بعضا در تناقض با یکدیگر می‌باشند اما در تعدادی نیز تفاهم و وحدت نظر وجود دارد.

۱-بار هارمونیک سیکلی

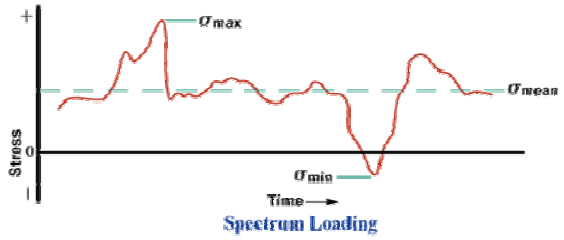
(a) بار دینامیکی وارده از سمت یک ماشین با سرعت دورانی بر روی پی

(b) بار دینامیکی سینوسی

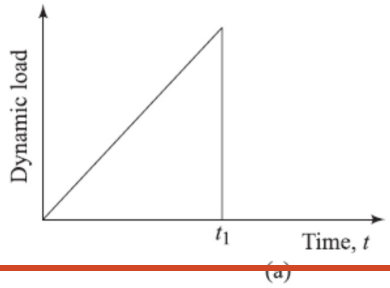


مقدمه و کلیات

۲-بار سیکلی: می تواند از ترکیب چند بار هارمونیک مثلا چند پی مرتعش بوجود آید.

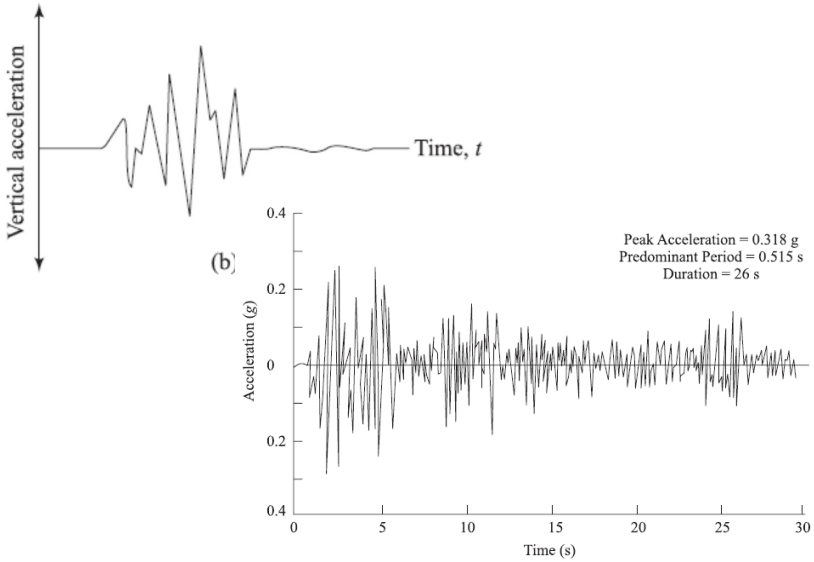


۳-بارگذاری بسیار سریع و کوتاه مدت انفجار و یا گذرا (بار ضربه‌ای اگر فقط یک بار اتفاق بیفتد) مثل بار وارده ی یک ضربه چکش



مقدمه و کلیات

۴-بارگذاری راندم (تصادفی)، شمع کوبی و نیروهای طبیعی (زلزله السنترو)



مقدمه و کلیات

تفاوت رفتار خاکها در برابر بار استاتیک و دینامیک

در یک ماسه مقاومت آن در برابر بارهای استاتیک به پارامترهای چندی از جمله D_r (که خود به پارامترهای دیگری میتواند مرتبط گردد) و نیز σ_3 بستگی دارد و یا در یک خاک رس مقاومت آن به پارامترهایی نظیر درصد رطوبت آن و یا درجه اشباع آن بستگی دارد اما مقاومت خاکها در برابر بارهای دینامیکی به عوامل دیگری نیز بستگی پیدا میکند از جمله:

۱- تنش دینامیکی

۲- تکرار بار

۳- شکل پالس (مربعی یا سینوسی)

مقدمه و کلیات

یادآوری چند تعریف اساسی

۱- زمان تناوب (پریود)

اگر حرکتی در فواصل زمانی یکسان تکرار گردد، آن را حرکت تناوبی (پریودیک) نامیده و مدت زمانی که طول می‌کشد که این حرکت یک بار انجام شود را زمان تناوب (پریود) گویند.

۲- دوره (سیکل)

حرکتی که در فاصله تناوب انجام می‌شود را دوره کامل (سیکل) می‌نامند.

۳- تناوب (فرکانس)

تعداد دوره‌های یک حرکت در واحد زمان را تناوب ارتعاش گویند.

۴- تناوب طبیعی (فرکانس طبیعی)

اگر یک سیستم ارتجاعی تحت تأثیر نیروهای داخلی و ذاتی خود و بدون اثر هیچ گونه نیروی خارجی ارتعاش کند تناوب چنین ارتعاشی را تناوب طبیعی می‌گویند (یا فرکانس طبیعی) یعنی این که یک خاک با ارتعاش یک ماشین به ارتعاش در نیاید بلکه خودش ذاتا مرتعش شود.

مقدمه و کلیات

یادآوری چند تعریف اساسی

۶- پدیده تشدید

چنان‌چه فرکانس حرکت یک سیستم با یکی از فرکانس‌های طبیعی آن برابر شود تشدید یا رزونانس اتفاق می افتد. دامنه حرکت در وضعیت تشدید ممکن است بسیار بزرگ شود به همین دلیل تعیین فرکانس‌های طبیعی یک سیستم از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. [یک سیستم با آزادی n (مثلا خاک) دارای n فرکانس طبیعی مستقل است].

پدیده تشدید مختص به یک سازه نمی‌باشد بلکه خاک‌ها نیز دارای فرکانس طبیعی مخصوص به خود می‌باشند که در زلزله‌های بزرگ می‌توانند نقش تشدیدکننده را ایفا نمایند.

۷- حالات (مودهای) اصلی ارتعاش

یک سیستم با n درجه آزادی در وضعیت پیچیده ای ارتعاش می‌کند که به نظر نمی‌رسد دامنه و فرکانس‌های حرکت از روند معینی تبعیت نمایند معذلک در میان این حرکات نامنظم انواع به خصوصی از حرکت‌های ساده و منظم دارند که حالات اصلی ارتعاش نامیده می‌شوند. در یک حالت اصلی ارتعاش هر نقطه در سیستم با فرکانس یکسانی ارتعاش می‌کند. سیستمی با n درجه آزادی n دارای n حالت اصلی و n فرکانس طبیعی می‌باشد. در یکی از حالت‌های استفاده شده خاک را یک درجه آزادی در نظر می‌گیرند که در نتیجه یک فرکانس طبیعی هم برای آن لحاظ می شود.

دینامیک خاک (Soil Dynamics) فصل دوم

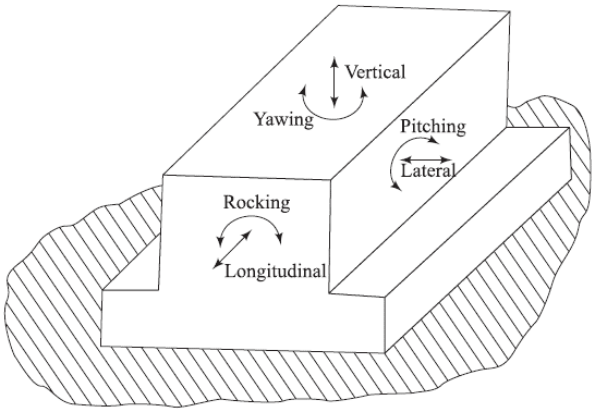
تئوری ارتعاشات

طراحی شالوده ها و پی های بر مبنای جابجایی است. این جابجایی ها به دو صورت رخ می دهد:

۱- جابجایی سیکلیک الاستیک سیستم شالوده و پی

۲- جابجایی پلاستیک خاک زیر شالوده

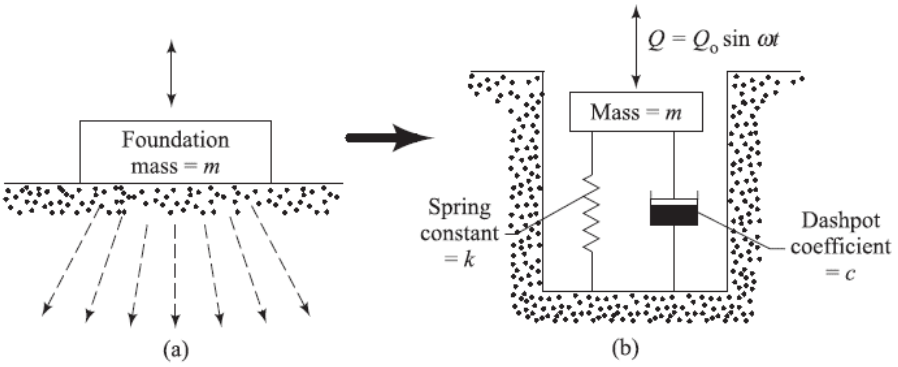
در مورد تخمیین جابجایی سیکلیک الاستیک سیستم شالوده و پی نیاز است طبیعت نیروهای وارد به شالوده را بدانیم.



تئوری ارتعاشات

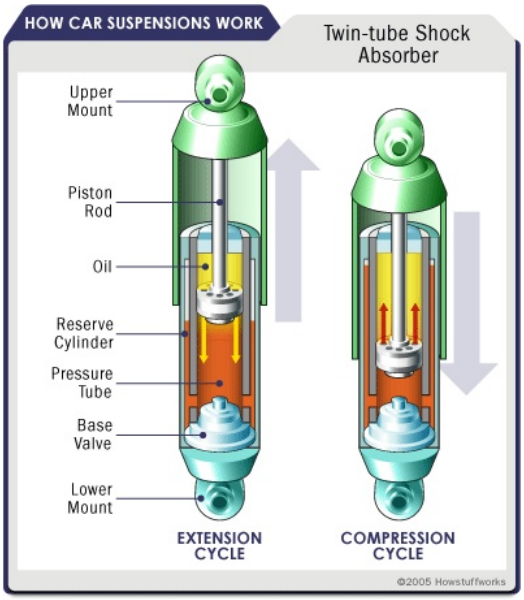
الگوسازی یک سیستم شالوده و پی به یک سیستم جرم و فنر و میراگر(ویسکوالاستیک)

نکته: سیستم بدون در نظرگیری میراگر، الاستیک و با آن ویسکوالاستیک است.



تئوری ارتعاشات

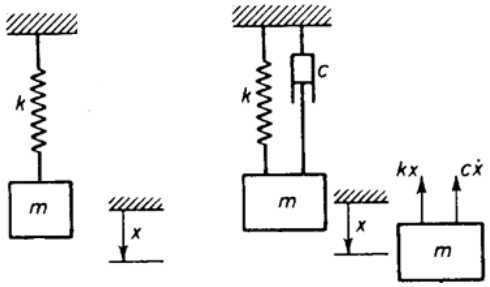
میراگرها

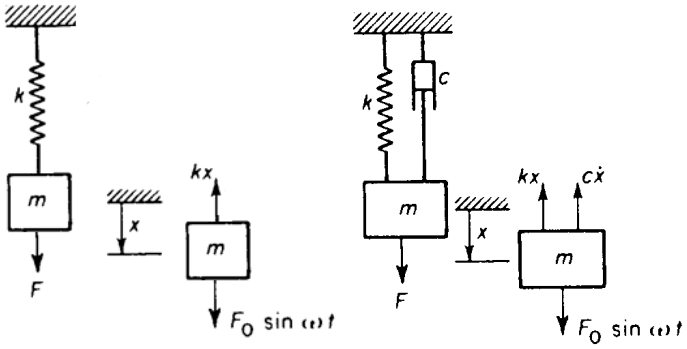


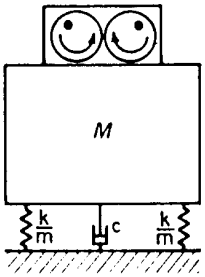
تئوری ارتعاشات

مدلسازی ریاضی سیستم جرم- فنر تحت ارتعاش

ارتعاش بدون میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش با میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش دورانی	• با میرایی و تحمیلی



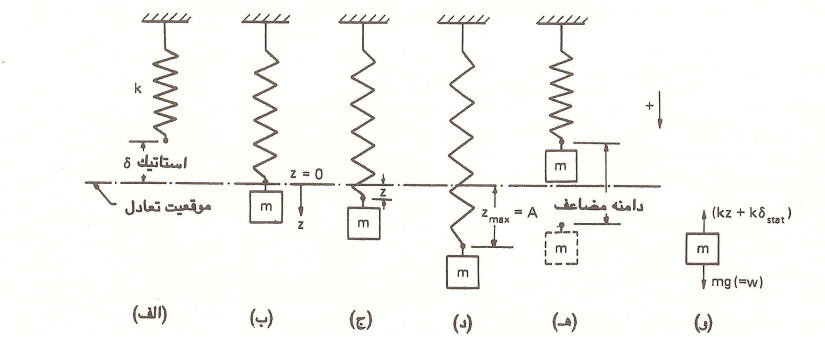




ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر بدون میرایی

در شکل نشان داده شده زیر یک فنر با سختی k در حالت اولیه (بدون تغییر مکان) مشاهده میشود. اگر جرم m را که دارای وزن W است به آن وصل نماییم، سیستم حالت جدیدی همانند وضعیت ب را به خود میگیرد میزان تغییر مکان فنر Z_{stat} در این وضعیت مطابق قانون فنرها برابر است با:

$$Z_{stat} = \frac{W}{k}$$



حال با صرف نظر از جرم فنر و با مراجعه به دیاگرام آزاد (و) میتوان نوشت:

$$\sum Fy = m.\ddot{Z}$$

با در نظر گرفتن علائم قراردادی و نیز توجه به این که نیروهای اینرسی که در خلاف جهت شتاب عمل میکنند میتوان نوشت که Z رو به پایین مثبت فرض میشود.

$$\sum Fy = m.\ddot{Z}$$

$$-\left(K.Z_{stat} + K.Z\right) + W = m.\ddot{Z}$$

از آنجایی که $W = m.g$ بوده و نیز $W = K.Z_{stat}$ میباشد میتوان داشت:

$$-K.Z = m.\ddot{Z}, \qquad m.\ddot{Z} + K.Z = 0$$

معادلهی فوق یک معادله دیفرانسیل موسوم به درجه دوم است که جواب عمومی آن دارای ۲ ثابت میباشد که باید از شرایط اولیه مسئله تعیین گردند جواب عمومی معادله چنین میباشد:

$$Z = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \qquad \ddot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0 \quad \Rightarrow \ddot{Z} = A\sin\sqrt{\frac{K}{m}} + B\cos\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$Z = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$$

که B, A ثوابت و دلخواه بوده و ω_n فرکانس طبیعی دورانی سیستم میباشد و چنانچه با دوبار مشتقگیری از معادله فوق $\ddot{Z}$ را تعیین و در معادلهی بالای صفحه جایگزین نماییم داریم:

$$\left(-\omega_n^2 + \frac{K}{m}\right)Z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_n^2 = \frac{K}{m} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

بعبارتی با یک آزمایش ساده و در تعادل استاتیکی قرار دادن وزنه متصل به فنر و اندازه گیری تغییر مکان فنر (بعد از رسیدن به تعادل استاتیکی) یعنی Z_{stat} می توان f_n را حساب نمود.

معادله فوق به صورت زیر قابل بیان است:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K.g}{m.g}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{(mg/K)}}$$

از طرفی $(mg/K) = \frac{W}{K} = Z_{stat} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{Z_{stat}}}$

در معادله $Z = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$ ثوابت دلخواه از شرایط مرزی قابل تعیین میباشند به عنوان مثال اگر:

$$t = 0 \to Z = Z_0 \to \dot{Z} = V_0 \qquad t = 0 \quad \to B = Z_0$$

اعمال شرایط در معادله ی فوق الذکر نتیجه می دهد:

$$Z = \frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + Z_0\cos\omega_n t$$

شایان ذکر است که جوابهای دیگر معادله $m.\ddot{Z} + K.Z = 0$ را به صورت ذیل میتوان بیان داشت:

$$Z = \bar{Z}\cos(\omega_n t - \alpha), \qquad \bar{Z} = \sqrt{Z_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{V_0}{Z_0\omega_n}$$

$$Z = Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}$$

تئوری ارتعاشات

$$z = Z\cos(\omega_n t - \alpha), \qquad Z = \sqrt{Z_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \alpha = \arctan\frac{V_0}{Z_0\omega_n}$$

$$t = 0, \qquad z = Z\cos(-\alpha) = Z\cos\alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{\omega_n}, \qquad z = Z\cos\left(\omega_n\frac{\alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = Z$$

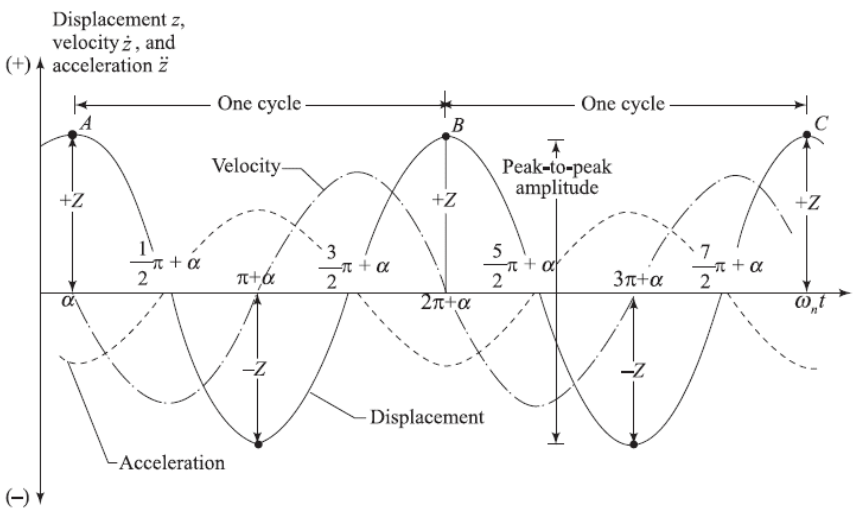
$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi + \alpha}{\omega_n}, \qquad z = Z\cos\left(\omega_n\frac{\frac{1}{2}\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = 0$$

$$t = \frac{\pi + \alpha}{\omega_n}, \qquad z = Z\cos\left(\omega_n\frac{\pi + \alpha}{\alpha_n} - \alpha\right) = -Z$$

$$t = \frac{\frac{3}{2}\pi + \alpha}{\omega_n}, \qquad z = Z\cos\left(\omega_n\frac{\frac{3}{2}\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = 0$$

$$t = \frac{2\pi + \alpha}{\omega_n}, \qquad z = Z\cos\left(\omega_n\frac{2\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = Z$$

تئوری ارتعاشات



تئوری ارتعاشات

مثال:

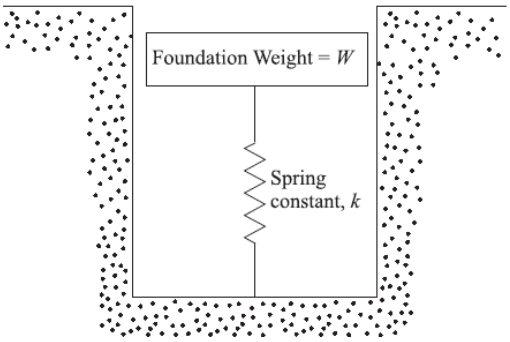
مطابق با شکل زیر اگر وزن فنداسیون برابر با ۴۵ کیلونیوتن و ضریب فنر عکس العمل زمین برابر ۱۰۰۰۰ کیلونیوتن بر متر باشد مطلوبست تعیین:

الف) فرکانس طبیعی سیستم

ب) پریود ارتعاش؟

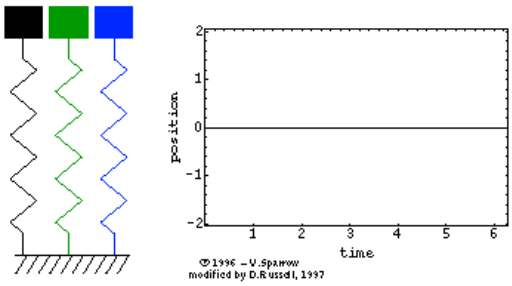
$$a)\ f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^4}{45/9.81}} = 7.43\,\text{Hz},$$

$$b)\ T = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{7.43} = 0.135\,\text{sec}$$



تئوری ارتعاشات

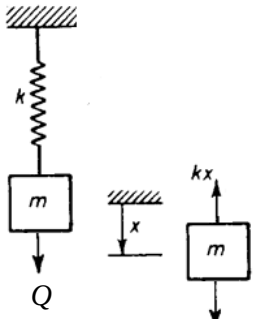
انیمیشن ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر بدون میرایی



The animated gif shows the simple harmonic motion of three undamped mass-spring systems, with natural frequencies (from left to right) of ω_o, $2\omega_o$, and $3\omega_o$. All three systems are initially at rest, but displaced a distance x_m from equilibrium.

حرکت با ارتعاش تحمیلی و بدون میرائی

نیروی متناوب تحمیلی به سیستم جرم و فنر



$$Q = Q_0 \sin(\omega t + \beta),$$

$$\boxed{m\ddot{z} + kz = Q_0 \sin(\omega t + \beta)}$$

معادله فوق دو جواب همگن و خصوصی دارد که مجموع آنها جواب کلی معادله است.

جواب خصوصی باید در معادله بالا صدق کند:

$$z_p = A_1 \sin(\omega t + \beta)$$

$$-\omega^2 m A_1 \sin(\omega t + \beta) + k A_1 \sin(\omega t + \beta) = Q_0 \sin(\omega t + \beta)$$

$$A_1 = \frac{Q_0/m}{(k/m) - \omega^2}$$

$$\boxed{z_p = \frac{Q_0/m}{(k/m) - \omega^2} \sin(\omega t + \beta)}$$

حرکت با ارتعاش تحمیلی و بدون میرائی

نیروی متناوب تحمیلی به سیستم جرم و فنر

$$\boxed{m\ddot{z} + kz = Q_0 \sin(\omega t + \beta)}$$

جواب خصوصی:

$$\boxed{z_p = \frac{Q_0/m}{(k/m) - \omega^2} \sin(\omega t + \beta)}$$

جواب همگن:

$$z_h = A_2 \cos(\omega_n t) + A_3 \sin(\omega_n t)$$

جواب کلی:

$$z = z_p + z_h = \frac{Q_0/m}{(k/m) - \omega^2} \sin(\omega t + \beta) + A_2 \cos(\omega_n t) + A_3 \sin(\omega_n t)$$

حرکت با ارتعاش تحمیلی و بدون میرائی با شرایط اولیه

$$z(t) = z_p + z_h = \frac{Q_0/m}{(k/m)-\omega^2}\sin(\omega t+\beta) + A_2\cos(\omega_n t) + A_3\sin(\omega_n t)$$

شرایط اولیه:

$$z(0) = z_0 = 0, \quad \frac{dz}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 = 0$$

$$A_1 \sin\beta + A_2 = 0$$

$$A_2 = -A_1 \sin\beta$$

$$\frac{dz}{dt} = A_1\,\omega\cos(\omega t+\beta) - A_2\,\omega_n\,\sin\,\omega_n t + A_3\,\omega_n\,\cos\,\omega_n t$$

$$A_1\,\omega\cos\beta + A_3\,\omega_n = 0$$

$$A_3 = -\left(\frac{A_1\,\omega}{\omega_n}\right)\cos\beta$$

$$z = A_1[\sin(\omega t+\beta) - \cos(\omega t)\,.\,\sin\beta - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\,.\,\cos\beta]$$

حرکت با ارتعاش تحمیلی و بدون میرائی با شرایط اولیه

$$z = A_1[\sin(\omega t+\beta) - \cos(\omega t)\,.\,\sin\beta - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\,.\,\cos\beta]$$

$$\beta = 0$$

$$z = A_1(\sin\omega t - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t)$$

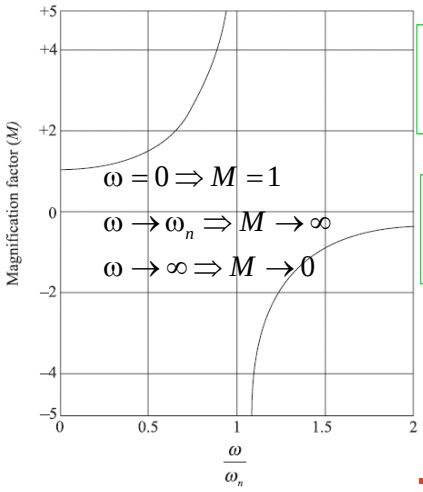
$$= \frac{Q_0/m}{(k/m)-\omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

$$z = \frac{Q_0/k}{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

$$z = z_s M\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right), \quad z_s = Q_0/k, \quad M = \frac{1}{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}$$

تشدید: اگر فرکانس ماشین با فرکانس طبیعی سیستم برابر باشد، تشدید یا روزنانس رخ میدهد. در رابطه زیر $\omega = \omega_n$ باشد انگاه رابطه زیر بصورت $\frac{0}{0}$ مبهم میشود و باید از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام استفاده شود.

$$z = z_s M\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right), \quad z_s = Q_0/k, \quad M = \frac{1}{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}$$



$$z = z_s \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{(d/d\omega)\left(\sin\omega t - (\omega/\omega_n)\sin\omega_n t\right)}{(d/d\omega)\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)}$$

$$z = z_s \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{(d/d\omega)\left(\sin\omega t - (\omega/\omega_n)\sin\omega_n t\right)}{(d/d\omega)\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)}$$

$$z = \frac{1}{2} z_s\left(\sin\omega_n t - \omega_n t\cos\omega_n t\right),$$

تشدید:

$$z = \frac{1}{2} z_s\left(\sin\omega_n t - \omega_n t\cos\omega_n t\right),$$

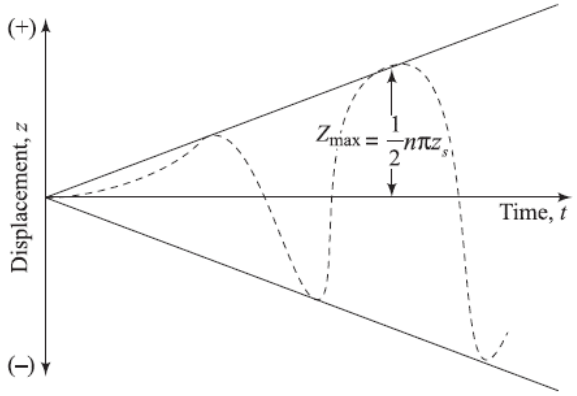
محل جابجایی بیشینه بصورت زیر تعیین میشود:

$$\dot{z} = \frac{1}{2} z_s(\omega_n \cos\omega_n t - \omega_n \cos\omega_n t + \omega_n^2 t \sin\omega_n t)$$
$$= \frac{1}{2}(z_s\omega_n^2 t)\sin\omega_n t$$

$$\dot{z} = 0 = \frac{1}{2}(z_s\omega_n^2 t)\sin\omega_n t$$

$$\sin\omega_n t = 0, \text{ i.e., } \omega_n t = n\pi$$

$$|z_{\max}|_{\text{res}} = \frac{1}{2} n\pi z_s$$



بیشینه نیروی وارد بر پی: برای تعیین بیشینه نیرو نیاز است که جابجایی ماکزیمم تعیین شود.

$$z = z_s M\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right),\quad z_s = Q_0/k,\quad M = \frac{1}{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = v = z_s M\omega\left(\cos\omega t - \sin\omega_n t\right),$$

$$z' = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\cos\omega t - \sin\omega_n t\right) = 2\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\omega_n - \omega\right)t\right\}\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\omega_n + \omega\right)t\right\},$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\omega_n - \omega\right)t = n\pi \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{2n\pi}{\omega_n - \omega} \\ \frac{1}{2}\left(\omega_n + \omega\right)t = m\pi \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{2m\pi}{\omega_n + \omega} \end{cases}$$

$$z = z_{\max} = \frac{Q_0}{k}\cdot\frac{1}{\left(1-\omega/\omega_n\right)}\cdot\sin\left(\frac{2\pi m\omega}{\omega_n + \omega}\right)$$

$$z_{\max(\max)} = \frac{\left(Q_0/k\right)}{1-\omega/\omega_n}$$

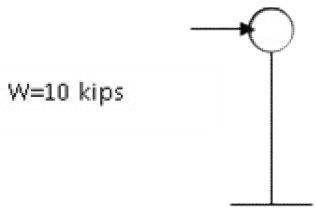
$$F_{\text{dynam(max)}} = k[z_{\max(\max)}] = \frac{k\left(Q_0/k\right)}{1-\omega/\omega_n} = \frac{Q_0}{1-\omega/\omega_n}$$

$$W - \frac{Q_0}{1-\omega/\omega_n} \text{ and } W + \frac{Q_0}{1-\omega/\omega_n}$$

مثال:

یک سیستم $SDOF$ نشان داده شده متشکل از وزنه $10Kips$ بر روی ستون بدون جرم مستقر است

اعمال نیروی استاتیک $5Kips$ به وزنه آن را در جهت افقی به میزان 0.04 اینچ جابهجا مینماید.



الف- فرکانس دورانی طبیعی

ب- پریود طبیعی ارتعاش

ج- تاریخچه زمانی پاسخ در حالتی که ناگهان نیروی افقی برداشته شود.

$$K = \frac{5}{0.04} = 125 Kips/in$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K.g}{W}} = \sqrt{\frac{(125)(12)(32.2)}{10}} = 69.5\, rad/\sec$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi\, rad}{69.5\, rad/\sec} = 0.09\sec$$

ج: شرایط اولیه عبارتند از:

$$Z_0 = 0.04 \qquad \dot{Z}_0 = 0 = V_0$$

$$Z = \frac{V_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + Z_0\cos(\omega_n t) = 0.04\cos 69.5t$$

مثال بعدی:

پی یک ماشین مرتعش میتواند به وسیله یک مدل جرم- فنر ساده در نظر گرفته شود. اگر نیروی تناوبی $Q = 8000\sin\omega t$ توسط ماشین ایجاد شود و نیز:

$$f = 800\ cycle/\min$$
$$W_f + W_m = 40000lb, \qquad K = 400000lb/in$$

باشند مقدار حداکثر و حداقل نیروی وارد بر پی را محاسبه کنید.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4\times10^5}{4\times10^4/(32.2\times12)}} = 62.16rad/\sec$$

$$\omega = ? \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{800}{60}\right) = 83.8rad/\sec$$

$$F_{max} = Q_0\left(1-\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1} = 8000\left(1-\frac{83.8}{62.16}\right)^{-1} = 23000lb$$

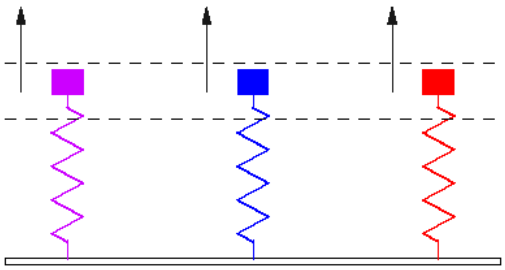
اما حداکثر نیروی وارده بر پی مقدار $F_{\max}$ نمیباشد !!!

(وزن ماشین+ وزن پی) + $F_{\max}$ = حداکثر نیروی وارده بر پی

(وزن ماشین+ وزن پی) - $F_{\max}$ = حداقل نیروی وارده بر پی

$$\textbf{حداکثر} = 23000 + 40000 = 63000lb$$
$$\textbf{حداقل} = 40000 - 23000 = 17000lb$$

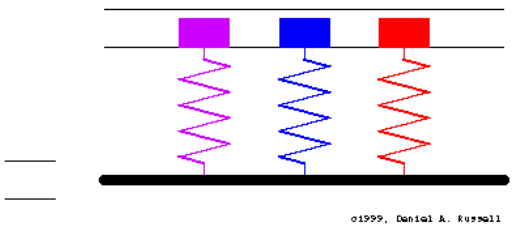
انیمیشن ارتعاش اجباری بدون میرایی



Transient response to an applied force: Three identical damped 1-DOF mass-spring oscillators, all with natural frequency $\mathbf{f_0=1}$, are initially at rest. A time harmonic force $F=F_0\cos(2\ pi\ f\ t)$ is applied to each of three damped 1-DOF mass-spring oscillators starting at time t=0. The driving frequencies ω of the applied forces are (matching colors)
$\mathbf{f_0=0.4}$, $\mathbf{f_0=1.01}$, $\mathbf{f_0=1.6}$

The animation shows response of the masses to the applied forces. The direction and magnitude of the applied forces are indicated by the arrows. The dashed horizontal lines provide a reference to compare magnitudes of resulting steady state displacement.

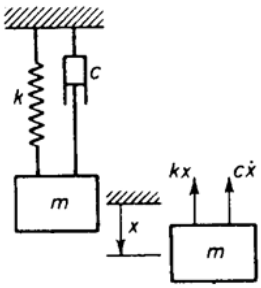
انیمیشن پاسخ یک سیستم مرتعش تحت حرکت پایه



Three simple 1-DOF mass-spring oscillators have natural frequencies (from left to right) of f_1=**1.6**, f_2=**1.0**, f_3=**0.63**. At time t=0 the base starts moving with sinusoidal displacement s(t) = S_0sin(t) where the driving frequency is ***f*=1.001**. The damping rate for all three oscillators is 0.1 so that the initial transient motion decays and a steady-state is obtained.

The animation shows the motion of the base and the resulting motion of all three oscillators together. The horizontal lines indicate the maximum displacement of the base.

ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر با میرایی



$$\sum F = m.\ddot{Z} \qquad (۱)$$

$$-K\left(Z_S + Z\right) + W - C.\dot{Z} = m.\ddot{Z} \qquad (۲)$$

$$m.\ddot{z} + C.\dot{z} + K.z = 0 \qquad (۳)$$

جواب معادله دیفرانسیل

$$z = A.e^{r.t}$$

$$\dot{z} = r.A.e^{r.t}, \quad \ddot{z} = r^2.A.e^{r.t}$$

جایگزینی $\ddot{z}, \dot{z}, z$ در (۳) نتیجه میدهد:

$$m.r^2.A.e^{rt} + C.r.A.e^{rt} + K.A.e^{rt} = 0 \qquad (۴)$$

$$m.r^2 + C.r + K = 0 \qquad r^2 + \left[\frac{C}{m}\right]r + \left[\frac{K}{m}\right] = 0 \qquad (۵)$$

با معلوم بودن C, K, m مقدار r نامعلوم از معادله (۵) به دست میآید:

$$r = -\left[\frac{C}{2m}\right] \pm \sqrt{\frac{C^2}{4m^2} - \frac{K}{m}} \qquad (۶)$$

حالات مختلف ریشهها جوابهای متفاوت میدهد:

ریشهها هر دو منفی و حقیقی هستند و این حالت میرایی فوق بحرانی است:

$$\Delta > 0 \qquad \frac{C}{2m} > \sqrt{\frac{K}{m}}$$

ریشههای یکی هستند و $r = \frac{-C}{2m}$ و میرایی دراین حالت میرایی بحرانی نامیده میشود:

$$\Delta = 0 \qquad \frac{C}{2m} = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \boxed{c = c_c = 2\sqrt{km}}$$

ریشههای موهومی هستند و میرایی در این وضعیت زیربحرانی نامیده میشود:

$$\Delta < 0 \qquad \frac{C}{2m} < \sqrt{\frac{K}{m}}$$

ضریب میرایی: $\boxed{D = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$

ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر با میرایی

$$m.\ddot{z} + C.\dot{z} + K.z = 0$$

$$z = A_1 e^{r_1.t} + A_2.e^{r_2.t}$$

$$r^2 + \left(\frac{c}{m}\right)r + \frac{k}{m} = 0$$

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \omega_n\left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1}\right)$$

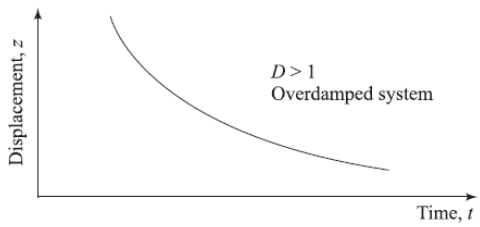
$$\omega_n = \sqrt{k/m} \qquad \boxed{D = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

۱- حالت فوق بحرانی *Over damped*

در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی است یعنی D>1 است و سیستم ارتعاشی نیست.

$$\boxed{Z = A_1 \exp\left[\omega_n t\left(-D + \sqrt{D^2 - 1}\right)\right] + A_2 \exp\left[\omega_n t\left(-D - \sqrt{D^2 - 1}\right)\right]}$$

$$\boxed{z = e^{-D\omega_n t}\left[A_3 \cosh\left(\omega_n\sqrt{D^2 - 1}t\right) + A_4 \sinh\left(\omega_n\sqrt{D^2 - 1}t\right)\right]}$$



ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر با میرایی

$$m.\ddot{z}+C.\dot{z}+K.z=0$$

$$z=A_1e^{r_1.t}+A_2.e^{r_2.t}$$

$$r^2+\left(\frac{c}{m}\right)r+\frac{k}{m}=0$$

$$r=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{c}{4m^2}-\frac{k}{m}}=\omega_n\left(-D\pm\sqrt{D^2-1}\right)$$

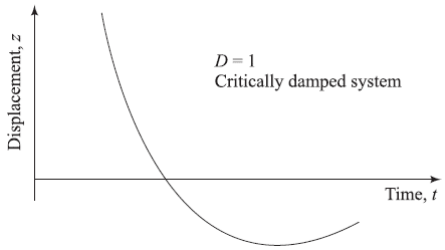
$$\omega_n=\sqrt{k/m}$$

$$\boxed{D=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

۲- حالت بحرانی *Critically damped*

در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی است یعنی D=1 است و سیستم ارتعاشی نیست.

$$\boxed{z=(A_5+A_6t)e^{-\omega_n t}}$$



ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر با میرایی

$$m.\ddot{z}+C.\dot{z}+K.z=0$$

$$z=A_1e^{r_1.t}+A_2.e^{r_2.t}$$

$$r^2+\left(\frac{c}{m}\right)r+\frac{k}{m}=0$$

$$r=\omega_n\left(-D\pm i\sqrt{1-D^2}\right)$$

$$r=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{c}{4m^2}-\frac{k}{m}}=\omega_n\left(-D\pm\sqrt{D^2-1}\right)$$

$$\omega_n=\sqrt{k/m}$$

$$\boxed{D=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

۳- حالت زیر بحرانی *Under damped*

در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه موهومی است یعنی D<1 است و سیستم ارتعاشی است.

$$z=e^{-D\omega_n t}\left[A_7\exp\left(i\omega_n\sqrt{1-D^2}t\right)+A_8\exp\left(-i\omega_n\sqrt{1-D^2}t\right)\right]$$

$$z=e^{-D\omega_n t}\left[A_9\cos\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}t\right)+A_{10}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}t\right)\right]$$

۳- جواب حالت زیر بحرانی به شکل دیگر

$$z = e^{-D\omega_n t}\left[A_9 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}\,t\right) + A_{10}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}\,t\right)\right]$$

$$z = e^{-D\omega_n t}\left[z_0 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}\,t\right) + \frac{\upsilon_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n\sqrt{1-D^2}}.\sin\left(\omega_n\sqrt{1-D^2}\,t\right)\right]$$

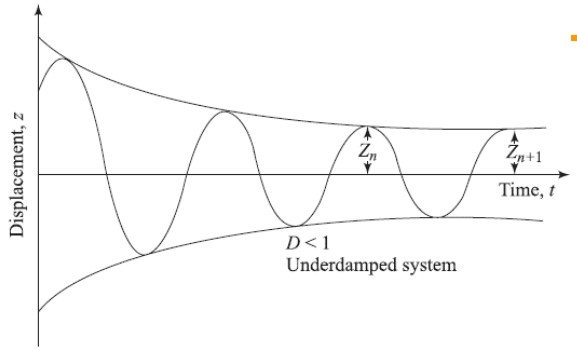
$$z = z_0, \qquad \frac{dz}{dt} = \upsilon_0$$

$$z = Z\cos(\omega_d t - \alpha)$$

$$Z = e^{-D\omega_n t}\sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n\sqrt{1-D^2}}\right)^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n z_0\sqrt{1-D^2}}\right)$$

$$\omega_d = \text{damped natural circular frequency} = \omega_n\sqrt{1-D^2}$$



همان طور که در نمودار حرکت ارتعاشی مربوط به این وضعیت دیدیم، با افزایش t و نیز D دامنه حرکت کاهش مییابد به طوری که $Z_{n+1} < Z_n$ است. نسبت این دو دامنهی متوالی عبارت است از:

$$\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \frac{\exp\left(-D\omega_n t_{n+1}\right)}{\exp\left(-D\omega_n t_n\right)} = \exp\left[-D\omega_n\left(t_{n+1} - t_n\right)\right] \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-D^2}}$$

و با تعریف کاهش لگاریتمی دامنهها به صورت داریم:

$$\delta = \ln\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \xrightarrow{D \ll 1} \delta = 2\pi D$$

محاسبه ضریب میرایی

مثال: در یک فونداسیون ماشین آلات ارتعاشی و $C = 200\,KN.\sec/m, \quad K = 11000\,KN/m$ $W = 60\,KN$ میباشند معین کنید.

الف- آیا سیستم بیش میرا، کم میرا و یـا در میرایـی بحرانـی است؟

ب- کاهش لگاریتمی

$$C_C = 2\sqrt{K.m} = 2\sqrt{11000 \times \frac{60}{9.81}} = 518.76 \;\; KN.\sec/m$$

پ- نسبت دودامنه ارتعاش متوالی

$$\frac{C}{C_C} = D = \frac{200}{518.76} = 0.386 < 1$$

ت- فرکانس طبیعی میرا شده را نیز پیدا کنید.

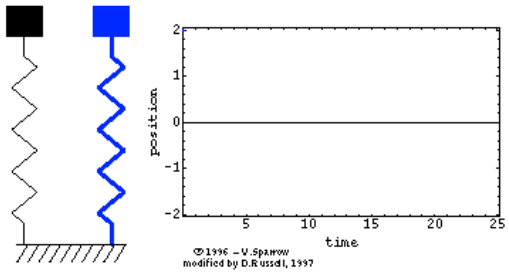
بنابراین میرایی زیربحرانی است و سیستم ارتعاش می‌کند.

$$\delta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{2\pi\,(0.386)}{\sqrt{1-(0.386)^2}} = 2.63 \qquad \frac{Z_n}{Z_{n+1}} = e^{\delta} = e^{2.63} = 13.87$$

$$f_n d = \sqrt{1 - D^2} \cdot f_n$$

$$f_n d = \sqrt{1 - 0.368^2} \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{11000 \times 9.81}{60}} = 6.23 Cps$$

انیمیشن ارتعاش آزاد یک سیستم جرم- فنر با میرایی

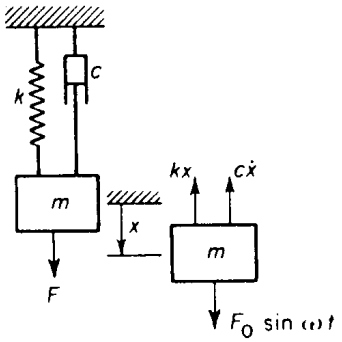


With damping:

The animated gif shows two 1-DOF mass-spring systems initially at rest, but displaced from equilibrium by $x=x_{max}$. The black mass is undamped and the blue mass is damped (underdamped). After being released from rest the undamped (black) mass exhibits simple harmonic motion while the damped (blue) mass exhibits an oscillatory motion which decays with time.

حرکت با ارتعاش تحمیلی و با میرایی

ارتعاش بدون میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش با میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش دورانی	• با میرایی و تحمیلی



معادله حاکم بر حرکت:

$$m.\ddot{z}+c.\dot{z}+k.z=Q_0\sin\omega t$$

معادله حاکم دارای دو جواب عمومی و خصوصی است که اولی بدلیل میرایی گذرنده و ناپایدار است و دومی حرکتی پایدار است. جوابها بصورت زیر است:

$$z_h=e^{-D\omega_n t}\left[A_3\sin\omega_{nd}(t)+A_4\cos\omega_{nd}(t)\right]$$

$$z_p=z=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t$$

$$\boxed{z_g=z_p+z_h}$$

حرکت با ارتعاش تحمیلی و با میرایی

$$m.\ddot{z}+c.\dot{z}+k.z=Q_0\sin\omega t$$

$$\boxed{z_p=z=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t}$$

$$m(-A_1\omega^2\sin\omega t-A_2\omega^2\cos\omega t)\ +k(A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t)$$
$$+c(A_1\omega\cos\omega t-A_2\omega\sin\omega t)\ =Q_0\sin\omega t$$

با فاکتورگیری از توابع سینوسی و کسینوسی سمت چپ و ساده نمودن خواهیم داشت:

$$(-mA_1\omega_2+kA_1-cA_2\omega)\sin\omega t=Q_0\sin\omega t$$

$$(-mA_2\omega_2+A_2k+cA_1\omega)\ \cos\omega t=0$$

باحذف سینوس و کسینوس از طرفین و تقسیم طرفین معادلات بالا بر m داریم:

$$A_1\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)-A_2\left(\frac{c}{m}\omega\right)=\frac{Q_0}{m}$$

$$A_1\left(\frac{c}{m}\omega\right)+A_2\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)=0$$

$$\boxed{A_1=\frac{(k-m\omega^2)\,Q_0}{\left(k-m\omega^2\right)^2+c^2\omega^2}}$$

$$\boxed{A_2=\frac{-c\,\omega\,Q_0}{\left(k-m\omega^2\right)^2+c^2\omega^2}}$$

روش دیگر:

$$m.\ddot{z}+c.\dot{z}+k.z=Q_0\sin\omega t$$

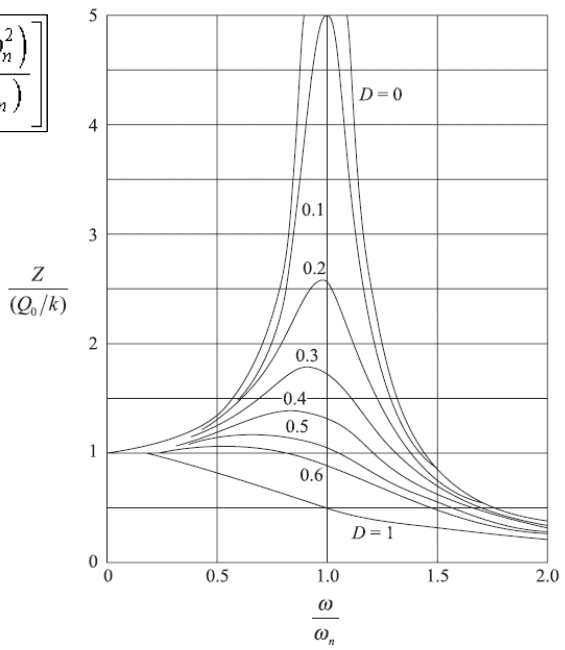
$$\boxed{z=Z\cos(\omega t+\alpha)}$$

$$\boxed{\alpha=\tan^{-1}\left(-\frac{A_1}{A_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{k-m\omega^2}{c\omega}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}{2D\left(\omega/\omega_n\right)}\right]}$$

$$\boxed{Z=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\frac{\left(Q_0/k\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)\right]^2+4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}}$$

$$\boxed{\frac{Z}{\left(Q_0/k\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)\right]^2+4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}}$$

$$D=\frac{C}{C_C}=\frac{C}{2\sqrt{K.m}}$$



روزنانس یا تشدید:

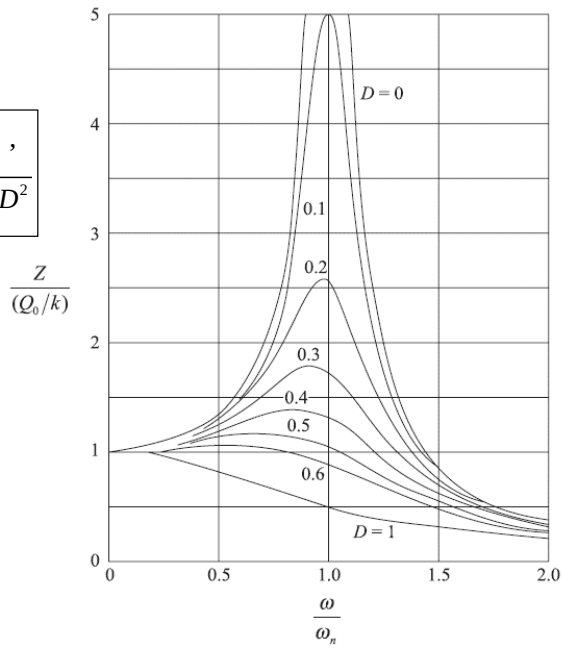
$$M=\frac{Z}{\left(\frac{Q_0}{K}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\beta^2\right]+\left[2D\beta\right]^2}},\quad \beta=\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \beta}=0$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)-2D^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)=0$$

$$\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2D^2}\ ,\quad f_m=\frac{1}{2\pi}\omega_n\sqrt{1-2D^2}$$

$$Z_{res}=\frac{Q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(1-2D^2\right)\right]^2+4D^2\left(1-2D^2\right)}}=\frac{Q_0}{k}\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$



$$M=\frac{Z}{\left(\frac{Q_0}{K}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\beta^2\right]+\left[2D\beta\right]^2}},\quad \beta=\frac{\omega}{\omega_n}$$

دقت نماییم که اگر $C=0$ آنگاه $D=\frac{C}{C_C}=0$ آنگاه رابطه ی فوق به صورت رابطه تشدید برای سیستم بدون میرائی که در قبل به دست می آید میگردد.

$$\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2D^2}\ ,\quad f_m=\frac{1}{2\pi}\omega_n\sqrt{1-2D^2}$$

$$if\quad D=0\rightarrow\omega_m=\omega_n$$

$$if\quad D=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\omega_m=0, M=1$$

$$Z_{res}=\frac{Q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(1-2D^2\right)\right]^2+4D^2\left(1-2D^2\right)}}=\frac{Q_0}{k}\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

حداکثر نیروی وارد دینامیکی به پی

برای پی‌های مرتعش شونده می‌توان نیروی دینامیکی بر بستر را محاسبه نمود اما برخلاف قسمت قبل، که در آن از میرایی خبری نبود در این قسمت برای محاسبه نیروی وارد بر پی نمی‌توان گفت که:

$$F_{\max} = k.z_{\max}$$

زیرا در همان وضعیت میراگر موجود نیرویی را متناسب با سرعت سیستم جذب نموده است پس محاسبات لازم برای محاسبه نیروی وارد بر پی به صورت:

$$F_{dynam} = k.z + c.\dot{z}$$

$$z = Z\cos(\omega t + \alpha) \qquad \dot{z} = -\omega Z\sin(\omega t + \alpha)$$

$$F_{\text{dynam}} = kZ\cos(\omega t + \alpha) - c\omega Z\sin(\omega + \alpha)$$

$$kZ = A\cos\phi \quad \text{and} \quad c\,\omega Z = A\sin\phi,$$

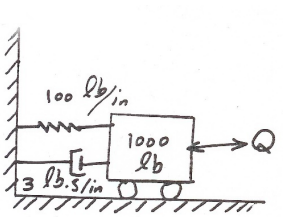
$$\boxed{F_{\text{dynam}} = A\cos(\omega t + \phi + \alpha)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{(A\cos\phi)^2 + (A\sin\phi)^2} = Z\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{[1-\beta^2] + [2D\beta]^2}}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}}$$

مثال:

یک سیستم جرم و فنر مطابق شکل از حالت سکون خارج و تحت اثر بار سینوسی $Q = 100 \sin \omega t$ lb قرار گرفته است حرکت گذرا و پایدار کل سیستم را تعیین نمایید.



$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K \cdot g}{W}} = \sqrt{\frac{100 \times 12 \times 32.2}{1000}} = 6.22\, rad/\sec$$

$$D = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{C \cdot g}{2 \cdot W \cdot \omega_n} = \frac{3 \times 32.2 \times 12}{2 \times 1000 \times 6.22} = 0.093$$

$$\omega_{nd} = \omega_n\sqrt{1 - D^2} = 6.22\sqrt{1 - (0.093)^2} = 6.19\, rad/\sec$$

معادله حرکت کل سیستم مطابق آن‌چه که قبلا گفته شد عبارت است از:

$$Z = e^{-D\omega_n t}\left[C_1 \sin\omega_n dt + C_2 \cos\omega_n dt\right] + \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2\right]}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t - 2D\beta\cos\omega t\right]$$

برای شرایط اولیه $Z_0 = 0 \leftarrow t = 0$ (بار سینوسی است). جایگذاری مقادیر فوق در معادله ی بالا می دهد:

$$Z_0 = 0 = C_2 + \frac{Q_0}{K}\frac{-2D\beta}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2\right]} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{Q_0}{K}\frac{2D\beta}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2D\beta)^2\right]}$$

$$Z = e^{-D\omega_n t}\left[C_1 \sin\omega_n dt + C_2 \cos\omega_n dt\right] + \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}\left[\left(1-\beta^2\right)\sin\omega t - 2D\beta\cos\omega t\right]$$

برای شرایط اولیه $Z_0 = 0 \leftarrow t = 0$ (بار سینوسی است). جایگذاری مقادیر فوق در معادله ی بالا می دهد:

$$Z_0 = 0 = C_2 + \frac{Q_0}{K}\frac{-2D\beta}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{Q_0}{K}\frac{2D\beta}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}$$

برای سرعت اولیهی $\dot{Z}_0 = 0$ در $t = 0$ داریم:

$$\dot{Z}_0 = 0 \rightarrow \omega_{nd}.C_1.\omega_n.C_2\left(-D\right) + \frac{Q_0}{K}\frac{\omega\left(1-\beta^2\right)}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}$$

$$C_1 = \frac{Q_0}{K}\frac{\omega}{\omega_n d}\frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$

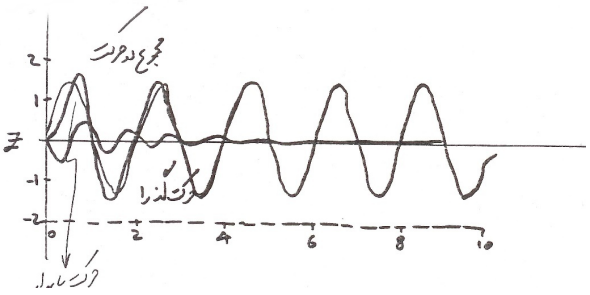
$$Z_1 = \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]} e^{-D\omega_n t}\left[\beta\left(\beta^2 + 2D^2 - 1\right)\sin\omega_n dt + 2D\beta\cos\omega_n dt\right]$$

$$Z_2 = \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}\left[\left(1-\beta^2\right)\sin\omega t - 2D\beta\cos\omega t\right]$$

$$Z_1 = \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]} e^{-D\omega_n t}\left[\beta\left(\beta^2 + 2D^2 - 1\right)\sin\omega_n dt + 2D\beta\cos\omega_n dt\right]$$

$$Z_2 = \frac{Q_0}{K}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2D\beta\right)^2\right]}\left[\left(1-\beta^2\right)\sin\omega t - 2D\beta\cos\omega t\right]$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$



وزن یک ماشین و پی آن $140\ KN$ است ضریب ثابت فنر و نسبت میرایی خاک به ترتیب $12 \times 10^4\ KN/m$ ، 0.2 میباشد و ارتعاش جزئی توسط نیرویی به صورت: $Q = 46\sin 157t\ (\text{kN})$ اعمال میشود. مطلوب است:

الف- تواتر طبیعی غیرمیرایی پی

ب- دامنه حرکت

پ- حداکثر نیروی دینامیکی انتقال یافته به خاک زیر پی

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12\times10^4}{140/9.81}} = 14.59Cps, \quad \omega_n = 2\pi f_n = 2\pi(14.59) = 91.67 rad/\sec, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = 1.71$$

$$Z = \frac{Q_0/K}{\left[\left[1-\beta^2\right]^2 + \left[2D\beta\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{46/\left(12\times10^4\right)}{\left[\left[1-1.71^2\right]^2 + \left[2\times0.2\times1.71\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}} = 0.000187m$$

$$A = Z\sqrt{k^2 + (c.\omega)^2} \quad \Rightarrow \quad C = 2D\sqrt{k.m} = 2\times0.2\sqrt{12\times10^4\times\frac{140}{9.81}} = 523.46\,\text{kNsec/m}$$

$$F_{dynam_{\max}} = A = 0.000187\sqrt{k^2 + (c.\omega)^2} = 0.000187\sqrt{\left(12\times10^4\right)^2 + \left(523.46\times157\right)^2} = 27.20\,\text{kN}$$

ارتعاش دورانی و با میرایی

ارتعاش بدون میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش با میرایی	• آزاد • تحمیلی
ارتعاش دورانی	• با میرایی و تحمیلی

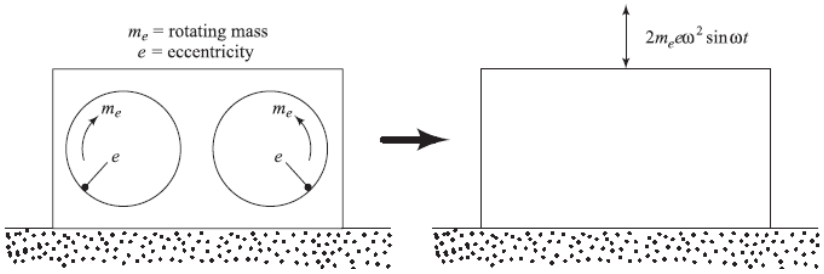
$$m\ddot{z} + kz + c\dot{z} = Q_0 \sin \omega t$$

$$Q_0 = 2m_e e\omega^2 = U\omega^2$$

$$U = 2m_e e$$

$$\boxed{z = Z\cos(\omega t + \alpha)}$$

$$\boxed{Z = \frac{(U/m)(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)^2 + 4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left[\frac{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}{2D(\omega/\omega_n)}\right]$$



$$z = Z\cos(\omega t + \alpha)$$

$$Z = \frac{(U/m)(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)^2 + 4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}$$

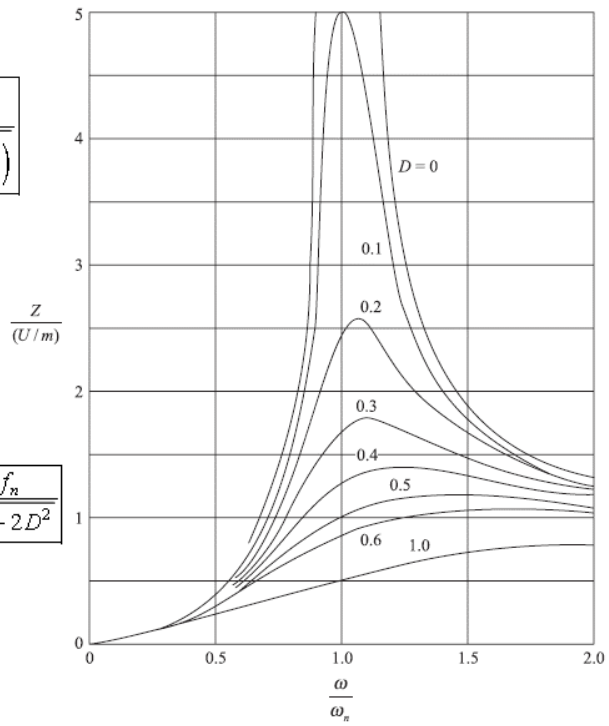
$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}{2D(\omega/\omega_n)}\right]$$

$$\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2D^2}}$$

فرکانس تشدید:

$$f_m = \text{damped resonant frequency} = \frac{f_n}{\sqrt{1-2D^2}}$$

$$Z_{res} = \frac{U/m}{2D\sqrt{1-D^2}}$$



تعیین ضریب میرایی:

۱- در ارتعاش آزاد

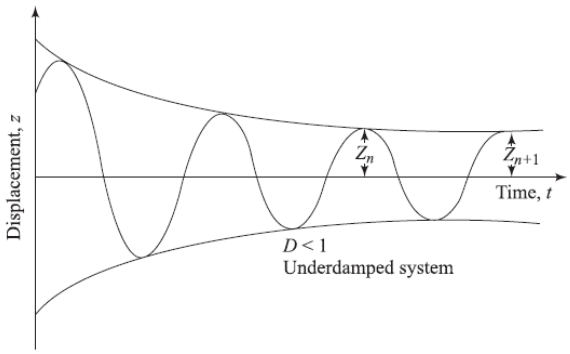
$$\delta = \ln\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

۲- در ارتعاش اجباری

$$\delta = \ln\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}\right) = 2\pi D$$

$$n\delta = \ln\frac{Z_0}{Z_n} = 2\pi n D$$

$$D = \frac{1}{2\pi n}\ln\frac{Z_0}{Z_n}$$



تعیین ضریب میرایی:

۱- در ارتعاش آزاد

۲- در ارتعاش اجباری

برای تعیین ضریب میرایی در ارتعاش اجباری یشکل گام به گام و بصورت زیر عمل می کنیم:

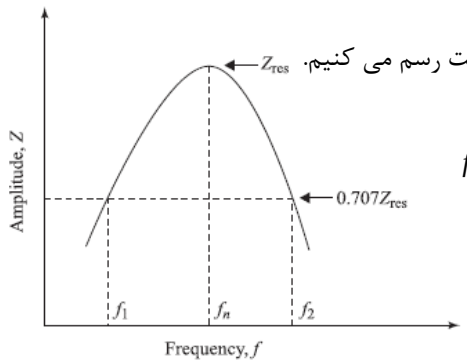
۱- سیستم را تحت ارتعاش قرار می دهیم.

۲- منحنی دامنه- فرکانس را که معمولا بصورت زیر است رسم می کنیم.

۳-تعیین محل دامنه تشدید Z_{res}

۴- محاسبه $0.707Z_{res}$ و تعیین فرکانس های f_1 و f_2

۵- ضریب میرایی از رابطه زیر تعیین می شود:



$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{f_2 - f_1}{f_n}\right)$$

اثبات

یادآوری:

$$m.\ddot{z} + c.\dot{z} + k.z = Q_0 \sin\omega t$$

$$z = Z\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{A_1}{A_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{k - m\omega^2}{c\omega}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}{2D\left(\omega/\omega_n\right)}\right]$$

$$Z = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{\left(Q_0/k\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)\right]^2 + 4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}$$

$$\frac{Z}{\left(Q_0/k\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)\right]^2 + 4D^2\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}}$$

$$Z_{res} = \frac{Q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(1-2D^2\right)\right]^2 + 4D^2\left(1-2D^2\right)}} = \frac{Q_0}{k}\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

$$\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2D^2}\ ,\quad f_m = \frac{1}{2\pi}\omega_n\sqrt{1-2D^2}$$

$$Z_{res} = \left(\frac{Q_0}{k}\right)\left(\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}\right) \qquad Z_{res} = \left(\frac{Q_0}{k}\right)\left(\frac{1}{2D}\right)$$

$$Z = 0.707\, Z_{res} = \frac{Q_0/k}{\sqrt{\left[1-(f/f_n)^2\right]^2 + 4D(f/f_n)^2}}$$

$$\frac{0.707}{2D} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(f/f_n)^2\right]^2 + 4D^2(f/f_n)^2}} \qquad \left(\frac{f_2}{f_n}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{f_n}\right)^2 = 4D\sqrt{1+D^2} \approx 4D$$

$$\left(\frac{f}{f_n}\right)^2 - 2\left(\frac{f}{f_n}\right)^2(1-2D^2) + (1-8D^2) = 0 \qquad \left(\frac{f_2}{f_n}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{f_n}\right)^2 = \left(\frac{f_2-f_1}{f_n}\right)\left(\frac{f_2+f_1}{f_n}\right)$$

$$\left(\frac{f}{f_n}\right)^2_{1,2} = (1-2D^2) \pm 2D\sqrt{1+D^2} \qquad \frac{f_2+f_1}{f_n} \approx 2$$

$$\left(\frac{f_2}{f_n}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{f_n}\right)^2 \approx 2\left(\frac{f_2-f_1}{f_n}\right) \qquad \boxed{4D = 2\left(\frac{f_2-f_1}{f_n}\right)}$$

تعیین ضریب میرایی:

۱- در ارتعاش آزاد

۲- در ارتعاش اجباری

برای تعیین ضریب میرایی در ارتعاش اجباری یشکل گام به گام و بصورت زیر عمل می کنیم:

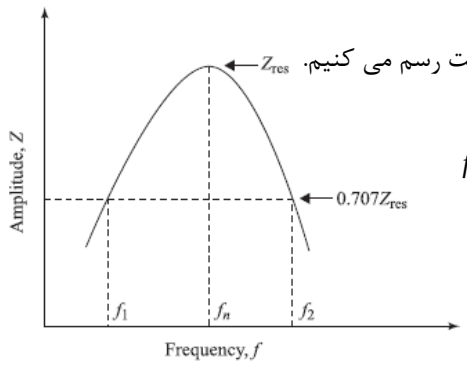
۱- سیستم را تحت ارتعاش قرار می دهیم.

۲- منحنی دامنه- فرکانس را که معمولا بصورت زیر است رسم می کنیم.

۳-تعیین محل دامنه تشدید Z_{res}

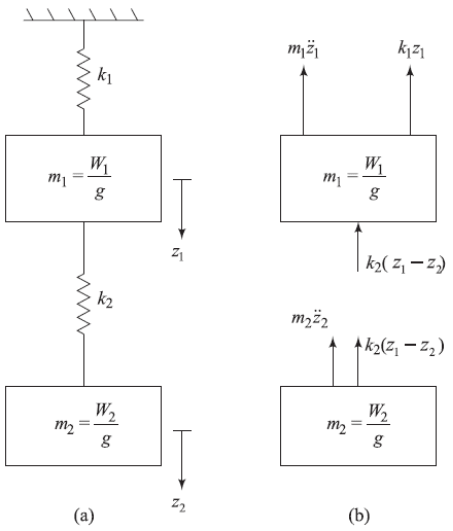
۴- محاسبه $0.707Z_{res}$ و تعیین فرکانس های f_1 و f_2

۵- ضریب میرایی از رابطه زیر تعیین می شود:



$$\boxed{D = \frac{1}{2}\left(\frac{f_2-f_1}{f_n}\right)}$$

سیستم دو درجه آزادی:



$$m_1\ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) = 0$$
$$m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) = 0$$

$$z_1 = A\sin\omega_n t$$
$$z_2 = B\sin\omega_n t$$

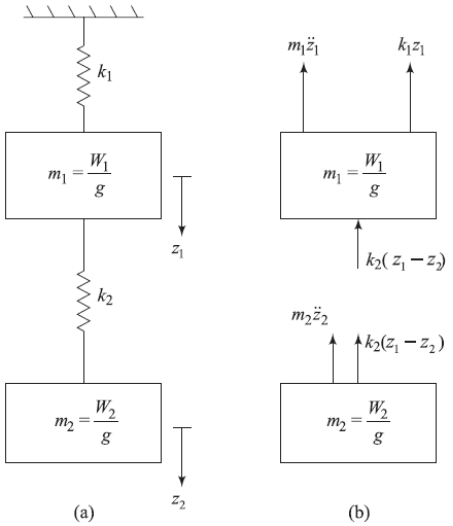
$$A(k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2) - k_2 B = 0$$

$$-Ak_2 + (k_2 - m_2\omega_n^2)B = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2)(k_2 - m_2\omega_n^2) = k_2^2$$
$$\omega_n^4 - \left(\frac{k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1}{m_1 m_2}\right)\omega_n^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

سیستم دو درجه آزادی:



$$m_1\ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) = 0$$
$$m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) = 0$$

$$z_1 = A\sin\omega_n t$$
$$z_2 = B\sin\omega_n t$$

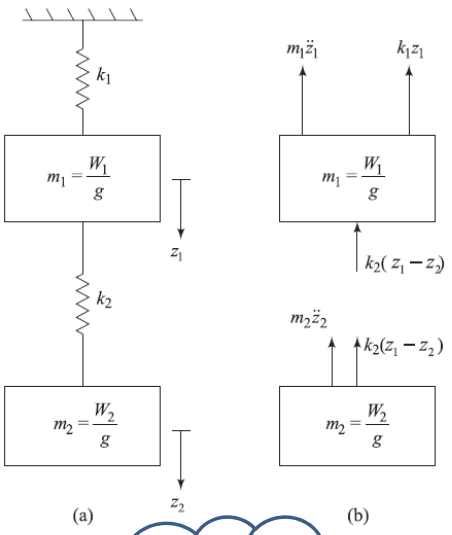
$$A(k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2) - k_2 B = 0$$

$$-Ak_2 + (k_2 - m_2\omega_n^2)B = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2)(k_2 - m_2\omega_n^2) = k_2^2$$
$$\omega_n^4 - \left(\frac{k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1}{m_1 m_2}\right)\omega_n^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

سیستم دو درجه آزادی:



$$m_1\ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) = 0$$
$$m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) = 0$$

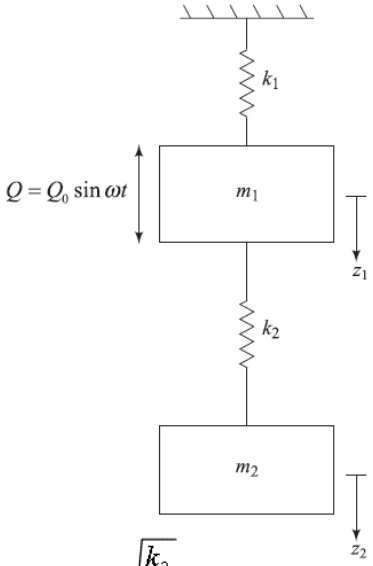
$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega_n^2)(k_2 - m_2\omega_n^2) = k_2^2$$
$$\omega_n^4 - \left(\frac{k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1}{m_1 m_2}\right)\omega_n^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega_{nl_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}}$$
$$\omega_{nl_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

$$\omega_n^4 - (1+\eta)(\omega_{nl_1}^2 + \omega_{nl_2}^2)\omega_n^2 + (1+\eta)(\omega_{nl_1}^2)(\omega_{nl_2}^2) = 0$$

سیستم دو درجه آزادی:



$$m_1\ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) = Q_0 \sin\omega t$$
$$m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) = 0$$

$$z_1 = A_1 \sin\omega t$$
$$z_2 = A_2 \sin\omega t$$

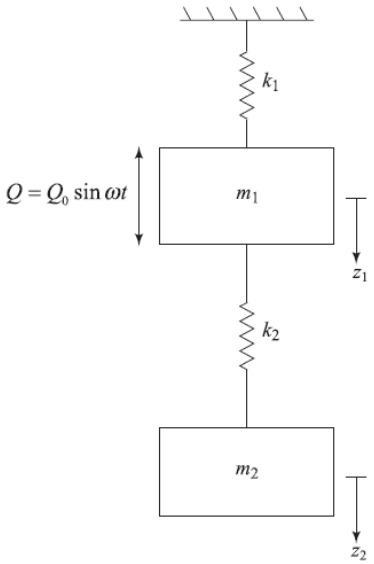
$$A_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) - A_2 k_2 = Q_0$$
$$A_2(k_2 - m_2\omega^2) - A_1 k_2 = 0$$

$$A_1 = \boxed{\frac{Q_0\left(\omega_{nl_2}^2 - \omega^2\right)}{m_1\Delta\left(\omega^2\right)}} \qquad \boxed{A_2 = \frac{Q_0\omega_{nl_2}^2}{m_1\Delta\left(\omega^2\right)}}$$

$$\omega_{nl_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - (1+\eta)(\omega_{nl_1}^2 + \omega_{nl_2}^2) + (1+\eta)(\omega_{nl_1}^2)(\omega_{nl_2}^2)$$

سیستم دو درجه آزادی:



$$z_1 = A_1 \sin \omega t$$
$$z_2 = A_2 \sin \omega t$$

$$A_1 = \boxed{\frac{Q_0\left(\omega_{nl_2}^2 - \omega^2\right)}{m_1 \Delta\left(\omega^2\right)}} \qquad \boxed{A_2 = \frac{Q_0 \omega_{nl_2}^2}{m_1 \Delta\left(\omega^2\right)}}$$

$$\omega_{nl_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

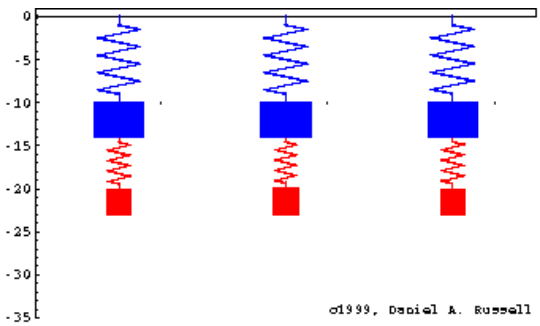
$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - (1+\eta)(\omega_{nl_1}^2 + \omega_{nl_2}^2) + (1 + \eta)(\omega_{nl_1}^2)(\omega_{nl_2}^2)$$

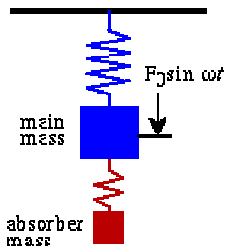
اگر $\omega_{nl_2} = \omega$ باشد آنگاه $A_1 = 0$ می شود.

به این سیستم ارتعاش جاذب می گویند.

انیمیشن ارتعاش جاذب

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$





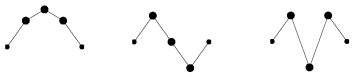
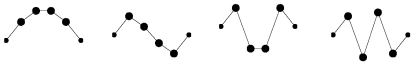
The 2-DOF system has two natural frequencies, corresponding to the two natural modes of vibration for the system. In the lower frequency mode both masses move in the same direction, in-phase with each other. In the higher frequency mode the two masses move in opposite direction, 180° out of phase with each other. The animation shows the motion of the 2-DOF system at normalized forcing frequencies of $f_{\cdot left}$**=0.67** (in-phase mode), f_{middle}**=1** (undamped classical tuned dynamic absorber), and f_{right}**=1.3** (opposite-phase mode). The arrows in the movie represent the magnitude and phase of the force applied to the main mass.

انیمیشن سیستم های چند درجه آزادی

A 1-degree-of-freedom system has 1 mode of vibration and 1 natural frequency

A 2-degree-of-freedom system has 2 modes of vibration and 2 natural frequencies

A 3-degree-of-freedom system has 3 modes of vibration and 3 natural frequencies



A 4-degree-of-freedom system has 4 modes of vibration and 4 natural frequencies