۴-۲ - تقارن های گسسته

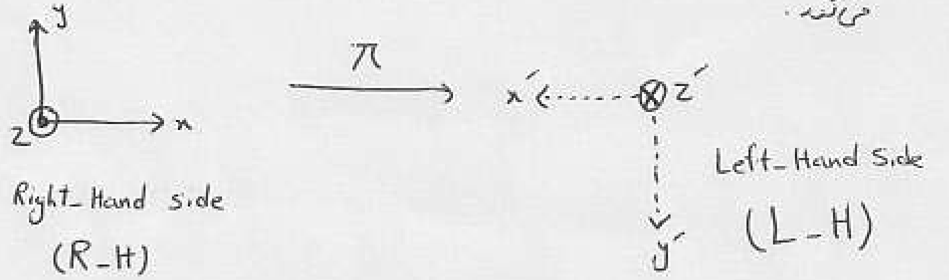
پاریته یا وارونی فضایی

در فصل گذشته، به مرور عملگرهای پیوسته پرداختیم که با اعمال پی در پی عملگرهای تقارنی بی نهایت کوچک به دست می آمدند.

اما هم اکنون می خواهیم عملگر پاریته را به عنوان اولین عملگر گسسته معرفی کنیم.

پاریته به معنای وارونی فضایی است.

اگر پاریته روی چارچوب مختصات اثر کند، دستگاه R-H را به L-H تبدیل می کند.



سوال این است که اثر عملگر پاریته روی کت حالت چیست؟

π عملگر پاریته

$|\alpha\rangle$ کت حالت دلخواه

$$\Longrightarrow \quad \pi|\alpha\rangle = ?$$

در این مرحله، تنها چیزی که می دانیم آن است که عملگر π وارونی فضایی ایجاد می کند.

با توجه به آنچه از مفهوم داروی فضایی می‌دانیم،
ملزم می‌کنیم که :

$$\langle \alpha | \pi^{+} x \, \pi | \alpha \rangle = - \langle \alpha | x | \alpha \rangle$$

$\uparrow$

مقدار چشمداشتی عملگر x نسبت به
تحت حالت $\pi|\alpha\rangle$
یا
مقدار چشمداشتی x نسبت به
تحت حالتی که تحت عمل پاریته قرار گرفته
یعنی $\pi|\alpha\rangle$

$\uparrow$

مقدار چشمداشتی عملگر x نسبت
به حالت $|\alpha\rangle$
یا
مقدار چشمداشتی x نسبت
به حالت اولیه $|\alpha\rangle$

از عبارت فوق، خواهیم داشت

$$\pi^{+} x \, \pi = - x$$ (می‌گوییم x تحت پاریته فرد است)

$$\underbrace{\pi \pi^{+}}_{1} x \, \pi = - \pi x$$ (عملگر پاریته یکانی $\pi\pi^{+}=1$)

$$x \pi = - \pi x$$

$$\boxed{x \pi + \pi x = 0}$$

$$\boxed{\{x , \pi\} = 0}$$ رابطه پادجابه‌جایی

سؤال: ویژه کت عملگر مکان چگونه تحت پاریته تبدیل می‌شود؟

$$\pi | x' \rangle = ?$$

ص۱۰ $\pi|x'\rangle = e^{i\delta}|-x'\rangle$

$$x\pi|x'\rangle = -\pi \underbrace{x|x'\rangle}_{x'|x'\rangle} = -x'\pi|x'\rangle \implies$$

$$x\pi|x'\rangle = -x'\pi|x'\rangle \quad (1)$$

از طرف دیگر : $x|-x'\rangle = -x'|-x'\rangle \quad (2)$

$$(1),(2) \implies |-x'\rangle \underset{\text{متناسب}}{\propto} \pi|x'\rangle$$

$$\pi|x'\rangle \propto |-x'\rangle$$

$$\pi|x'\rangle = e^{i\delta}|-x'\rangle \xrightarrow{\text{قرارداد: } e^{i\delta}=1} \boxed{\pi|x'\rangle = |-x'\rangle}$$

$$\pi^2|x'\rangle = \pi|-x'\rangle = |x'\rangle$$

$$\boxed{\pi^2|x'\rangle = |x'\rangle}$$

↓

ویژه مقادیر پاریته می‌توانند ± 1 باشند

$$\boxed{\begin{aligned} &\pi|x'\rangle = |-x'\rangle \\ &\langle x'|\pi^{-1} = \langle -x'| \\ \hline &\langle x'|\pi^{-1}\pi|x'\rangle = \langle -x'|-x'\rangle = 1 \\ &\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\pi|x'\rangle = |-x'\rangle \\ &\langle x'|\pi^{\dagger} = \langle -x'| \\ \hline &\langle x'|\pi^{\dagger}\pi|x'\rangle = \langle -x'|-x'\rangle = 1 \\ &\boxed{\pi^{\dagger}\pi = 1} \end{aligned}}$$

توجه:
عملگر پاریته، یکانی و هرمیتی است.

سؤال: رفتار عملگر تکانه تحت پاریته چگونه است؟

$$P = m\frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{از این رابطه معلوم است}}$$

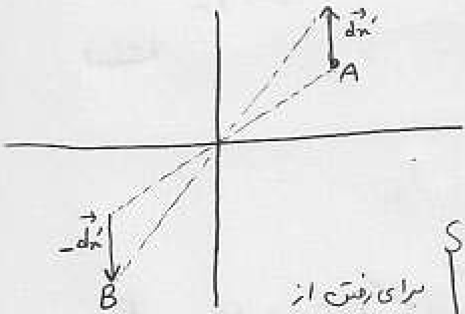
که رفتار x و P تحت پاریته باید یکسان باشد.

$$x \xrightarrow{\text{پاریته}} -x$$

$$P \xrightarrow{\text{پاریته}} -P$$

همانطور که $\{\pi, x\} = 0$ ، می‌توان گفت $\{\pi, P\} = 0$.

بیان دیگر:



می‌خواهیم از A به B برسیم.

برای رفتن از A به B دو راه وجود دارد.

$$\begin{cases} |B\rangle = \pi\, T(\vec{dx'})\, |A\rangle \\ \text{یا} \\ |B\rangle = T(-\vec{dx'})\, \pi\, |A\rangle \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi\, T(dx') = T(-dx')\, \pi$$

$$\pi\left(1 - \frac{iP.dx'}{\hbar}\right) = \left(1 + \frac{iP.dx'}{\hbar}\right)\pi$$

$$-\pi P = P\pi$$

$$\boxed{\{\pi, P\} = 0}$$

سوال: عملگر J چگونه تحت تاثیر پاریته قرار می‌گیرد؟ ص ۱۲

تکانه زاویه‌ای مداری $L = r \times P$

x و P هردو تحت پاریته فرد هستند

$$\boxed{[L, \pi] = 0}$$

L تحت پاریته زوج است.

$$\boxed{L\pi = \pi L}$$

اگر بخواهیم پاریته را در فضای معمول ریاضی با ماتریس نشان دهیم مثل یک دوران معکوس است

$$R_{\text{پاریته}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\text{پاریته}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$R_{\text{پاریته}}$، مختصات سیستم را معکوس می‌کند و با عملگر دوران رابطه جابه‌جایی دارد.

$$R_{\text{پاریته}} R_{\text{دوران}} = R_{\text{دوران}} R_{\text{پاریته}}$$

نکته: به عنوان اصل موضوع می‌پذیریم که این رابطه در مکانیک کوانتوم در مورد عملگرهای یکانی متناظر نیز وجود دارد. یعنی:

$$\pi D(R) = D(R) \pi$$

$$[\pi, D(R)] = 0$$

$$\left[\pi, 1 - i\frac{J \cdot n\phi}{\hbar}\right] = 0$$

$$\boxed{[\pi, J] = 0}$$

J تحت پاریته زوج است.

$$\boxed{\pi J = J \pi}$$

$$J = L + S$$

↑ تکانه زاویه‌ای کل — ↑ تکانه زاویه‌ای مداری — ↑ تکانه زاویه‌ای اسپین

$$\xrightarrow[{[J,\pi]=0}]{[L,\pi]=0}$$ نتیجه: $\boxed{[S,\pi]=0}$

اسپین تحت پاریته زوج است.

ـ بردارهایی که تحت پاریته فرد هستند: بردارهای قطبی: مثل x و P

ـ بردارهایی که تحت پاریته زوج هستند: بردارهای محوری یا شبه بردار: J و S و L

ـ x و P و J تحت دوران مانند هم تبدیل می‌شوند ولی تحت پاریته متفاوت عمل می‌کنند.

ـ $S.x$ و $L.S$ و $x.P$ کمیات نرده‌ای هستند که تحت دوران مانند هم تبدیل می‌شوند ولی:

$S.x$ تحت پاریته فرد است: $\pi^{-1} S.x\, \pi = -S.x$ ← کمیت شبه نرده‌ای

$S.L$ تحت پاریته زوج است: $\pi^{-1} S.L\, \pi = S.L$ ← کمیت نرده‌ای معمولی