بنابه تعریف ، انرژی جنبشی برابر با کاری است که توسط یک نیروی خارجی انجام می‌شود تا سرعت ذره از صفر به u برسد.

$$K = \int_{u=0}^{u} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

حالت کلاسیک $\longrightarrow m = m_0$ ،

$$K = \int F\,dx = \int ma\,dx = \int m_0 \frac{du}{dt}\,dx = \int m_0\,du\left(\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= \int_{u=0}^{u} m_0 u\,du = \frac{1}{2}m_0 u^2$$

فیزیک کلاسیک $F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(mu)$

$$= \frac{d}{dt}(m_0 u) = m_0\frac{du}{dt}$$

$$= m_0 a$$

در فیزیک کلاسیک، جرم در اثر حرکت نسبی تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند

نسبیت خاص $\longrightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ ،

$$K = \int F\,dx = \int \frac{d}{dt}(mu)\,dx =$$

$$= \int d(mu)\frac{dx}{dt} = \int (m\,du + u\,dm)u =$$

$$= \int_{u=0}^{u} (mu\,du + u^2 dm)$$

در فیزیک نسبیتی ، جرم در اثر حرکت نسبی تغییر می‌کند. براساس $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

با زیادشدن سرعت جسم ، جرم آن افزایش می‌یابد $(m > m_0)$

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \rightarrow m^2 - \frac{m^2u^2}{c^2} = m_0^2$$

$$m^2c^2 - m^2u^2 = m_0^2c^2$$

↓ دیفرانسیل گیری

$$2mdm\,c^2 - 2m\,dm\,u^2 - 2m^2u\,du = 0$$

↓ ÷m

$$\star \quad c^2dm = u^2dm + mu\,du$$

حال رابطه ★ (فرض) را در رابطه فوق جایگذاری می‌کنیم.

$$K = \int_{m=m_0}^{m} c^2\,dm = c^2(m - m_0)$$

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

فیزیک کلاسیک

انرژی جنبشی $K = \frac{1}{2} m_0 u^2$

جسمی با جرم سکون m_0

فیزیک نسبیتی

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} c^2 - m_0c^2$$

$$K = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

چند نکته مهم:

جرم نسبیتی $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ ⟶ در حد سرعت‌های پایین $u \ll c$ ، $\frac{u}{c} \ll 1$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1}} = m_0$$

در حد سرعت‌های پایین جرم نسبیتی تبدیل به جرم سکون می‌شود.

در نسبیت خاص، اگر ناظری در چارچوب لخت دلخواهی، جسمی را مطالعه کند که نسبت به آن ناظر ساکن باشد، جرم آن جسم را همان جرم سکون اندازه می‌گیرد.

if $u = 0$ ⟶ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0}} = m_0$

حال به رابطه زیر برمی‌گردیم :

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

در اینجا، دو تعریف را ارائه می‌کنیم :

۱- انرژی کل نسبیتی $E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

۲- انرژی سکون $E_0 = m_0c^2$

در نتیجه می‌توان نوشت :

$$K = E - E_0$$

$$E = K + E_0$$

در برهمکنش های ذرات با سرعتهای نسبیتی، اصل پایستگی انرژی به صورت زیر بیان می‌شود :

در یک دستگاه منزوی ذرات، انرژی کل نسبیتی ثابت باقی می‌ماند.

توجه : وقتی ذره در حال سکون است، $u=0$، و انرژی جنبشی صفر دارد، آنگاه انرژی ذره همان انرژی سکون ذره خواهد بود

سؤال: در حد سرعتهای پایین، آیا انرژی جنبشی نسبیتی به انرژی جنبشی کلاسیک تبدیل می‌شود؟

$$K = E - E_0$$

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$= m_0c^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

برای سرعتهای خیلی پایین داریم: $u \ll c$ یا $\frac{u}{c} \ll 1$.

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\cdots$$

به خاطر کوچک بودن $\frac{u}{c}$ از جملات دیگر بسط صرفنظر می‌شود

با جایگذاری در رابطه K به دست می‌آید:

$$K_{\text{نسبیتی}} = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1\right] = \frac{m_0c^2u^2}{2c^2} = \frac{1}{2}m_0u^2 = K_{\text{classic}} \checkmark$$

جواب سؤال مؤق بله است.

سؤال: انرژی جنبشی در حد $u \to c$ چقدر است؟

$$\text{if } u \to c \implies K \to \infty$$

مقدار کاری که باید انجام شود تا سرعت ذره از مقدار ۰ به مقدار c برسد بی نهایت است.

به معنی است که سرعت c یک سرعت حدی است.

استخراج یک رابطه مهم و کاربردی

$$K = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

$$P = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

} ⟹ با حذف u در این ۲ رابطه به دست می آید

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(K + m_0 c^2\right)^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\boxed{E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

وقتی یک ذره با سرعت نزدیک به سرعت نور در حرکت باشد، که اغلب در شتاب دهنده های ذرات پرانرژی رخ می دهد، دارای انرژی جنبشی بسیار بیشتر از انرژی سکون خواهد شد، یعنی

$$K \gg E_0$$

در این صورت، با تقریب بسیار خوب می توان نوشت

$$E \cong Pc$$

توجه:

روابط $K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2$ و $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ را در نظر بگیرید.

اگر ذره‌ای دارای جرم سکون صفر باشد، از روابط فوق مقدار $K=0$ و $E=0$ برای ذره به دست می‌آید که غیرمنطقی و غیرقابل قبول است.

برای چنین ذره‌ای لزوماً سرعت $u=c$ را باید به ذره نسبت داد تا با رفع ابهام $\frac{0}{0}$ بتوان برای K و E مقادیر متناهی و غیرصفر به دست آید.

از طرف دیگر، برای ذره‌ای با جرم سکون غیرصفر کار لازم، (K)، برای رساندن سرعت ذره به $u=c$ برابر با ∞ است.

انجام کار ∞ غیرممکن است پس ذره با جرم سکون غیرصفر هرگز نمی‌تواند به سرعت c برسد.

مثال - الکترونی دارای جرم سکون m_0 است.

می دانیم $m_0 = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$ می باشد. اگر انرژی جنبشی این الکترون $10\ MeV$ باشد، سرعت الکترون را بیابید.

$$E^2 = P^2C^2 + m_0^2C^4$$

$$P = \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - m_0^2C^4} = \frac{1}{C}\sqrt{(K + m_0C^2)^2 - m_0^2C^4}$$

$$C = 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}\ ,\quad K = 10 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}\ J\ ,\quad m_0 = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$$

با جایگذاری به دست می آید

$$P = \frac{1}{3 \times 10^8}\sqrt{(1,6 \times 10^{-9})^2 - (9,1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16})^2}$$

$$P = mu = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{C^2}}} \xrightarrow[m_0\ ,]{\text{با قرار دادن } P} u = 0,99\ 88\ C$$