تا به حال یاد گرفتیم:

$\boxed{H P H^{-1} = -P}$ و $\boxed{H x H^{-1} = x}$ .

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P} \Longrightarrow \boxed{H L H^{-1} = -L}$$

عملگر تکانه زاویه‌ای مداری تحت برگشت زمان فرد است.

$$[x_i , P_j] = i \delta_{ij} \hbar$$

$$[x_i , P_j] \,|\text{کت دلخواه}\rangle = i \delta_{ij} \hbar \,|\text{کت دلخواه}\rangle$$

$$H [x_i , P_j] |\;\rangle = H \; i\delta_{ij} \hbar |\;\rangle$$

$$H [x_i , P_j] |\;\rangle = -i\delta_{ij} \hbar H |\;\rangle$$

$$H [x_i , P_j] H^{-1} H |\;\rangle = -i\hbar \delta_{ij} H |\;\rangle$$

$$H (x_i P_j - P_j x_i) H^{-1} H |\;\rangle = -i\hbar \delta_{ij} H |\;\rangle$$

$$\left( H x_i P_j H^{-1} - H P_j x_i H^{-1} \right) H |\;\rangle = -i\hbar \delta_{ij} H |\;\rangle$$

$$\left( \underbrace{H x_i H^{-1}}_{x_i} \underbrace{H P_j H^{-1}}_{-P_j} - \underbrace{H P_j H^{-1}}_{-P_j} \underbrace{H x_i H^{-1}}_{x_i} \right) H |\;\rangle = -i\hbar \delta_{ij} H |\;\rangle$$

$$[x_i , -P_j] H |\;\rangle = -i\hbar \delta_{ij} H |\;\rangle \longrightarrow \boxed{[x_i , P_j] = i\hbar \delta_{ij}}$$

* با وجود اعمال عملگر برگشت زمان، رابطه جابجایی حفظ می‌شود.

همچنین اگر بخواهیم رابطه $[J_i , J_j] = i\varepsilon_{ijk} \hbar J_k$ حفظ

شود نیاز است که

$$\boxed{\Theta \vec{J} \Theta^{-1} = -\vec{J}}$$

توضیح رابطه فوق در حالت صوتی و تصویری ارائه می‌گردد.

تابع موج تحت عملگر برگشت زمان چگونه تغییر می‌کند؟

$$|\alpha\rangle = \int dx' \, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$ تابع موج : $\langle x'|\alpha\rangle$

$$\Theta|\alpha\rangle = \Theta\int dx' \, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int dx' \, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle^*$$ تابع موج : $\langle x'|\alpha\rangle^*$

به عبارت دیگر

$$\langle x'|\alpha\rangle \xrightarrow{\Theta} \langle x'|\alpha\rangle^*$$

$$\psi_\alpha(x') \xrightarrow{\Theta} \psi^*(x')$$

$$\psi(x',t) \xrightarrow{\Theta} \psi^*(x',-t)$$

مثال : توابع هماهنگ کروی که ویژه توابع عملگر $L^2$ و $L_z$ هستند، چگونه تحت عملگر برگشت زمان تغییر می‌کنند؟

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \xrightarrow{\Theta} Y^*_{lm}(\theta,\varphi)$$

از قبل می‌دانیم $Y^*_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi)$

در نتیجه می‌توان گفت

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \xrightarrow{\Theta} (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi)$$

یا

$$|l,m\rangle \xrightarrow{\Theta} (-1)^m |l,-m\rangle$$

یا

$$\Theta|l,m\rangle = (-1)^m |l,-m\rangle$$

ص ۵۴

یادآوری از کوانتوم ۱ : گاسیوروویچ

$$\text{if } \psi = A e^{+\frac{iBx}{\hbar}} \longrightarrow \text{شار احتمال } J = +\frac{|A|^2 B}{\hbar}$$

$$\text{if } \psi = A e^{-\frac{iBx}{\hbar}} \longrightarrow \text{شار احتمال } J = \frac{-|A|^2 B}{\hbar}$$

* با استفاده از رابطه $J=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$ می توانید J های بالا را محاسبه کنید

می دانیم $Y_{l,m}(\theta,\varphi) = e^{im\varphi} f(\theta) \longrightarrow +\vec{J}$

$$Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = e^{-im\varphi} f(\theta) \longrightarrow -\vec{J}$$

تعبیر فیزیکی :

تابع هماهنگ کروی را با شار احتمال J در نظر بگیرید. اگر عملگر برگشت زمان بر روی $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ اثر کند نتیجه آن متناسب با $Y_{l,-m}(\theta,\varphi)$ خواهد بود و برای تابع هماهنگ کروی که تحت تاثیر عملگر برگشت زمان قرار گرفته است جهت شار احتمال برعکس می شود یعنی J- بدست می آید.

یک توضیح یا مثال ساده برای درک موضوع :

$$\text{چشمه آب} \xrightarrow{\Theta} \text{چاهک آب}$$

آب به بیرون می رود $(\vec{J})$

آب به درون می رود $(-\vec{J})$

عملگر برگشت زمان چگونه بر روی تابع موج در فضای تکانه اثر می‌گذارد؟

$$|\alpha\rangle = \int dp' \, |p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \Theta \int dp' \, |p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle \Longrightarrow$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \, |-p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle^*$$

تغییر متغیر

$-p' = p''$ و (if $p' = -\infty \rightarrow p'' = +\infty$) و (if $p' = \infty \rightarrow p'' = -\infty$)

$-dp' = +dp''$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} -dp'' \, |p''\rangle \langle -p''|\alpha\rangle^*$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp'' \, |p''\rangle \langle -p''|\alpha\rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \, |p'\rangle \langle -p'|\alpha\rangle^*$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \, |p'\rangle \langle -p'|\alpha\rangle^*$$

نتیجه: $\varphi_\alpha(p') \xrightarrow{\Theta} \varphi_\alpha^*(-p')$

نکته: نحوه تاثیر عملگر برگشت زمان در هر مثالی باید به طور مستقل مورد توجه و مطالعه قرار گیرد.

قضیه: فرض کنید هامیلتونی تحت برگشت زمان ناوردا باشد و ویژه کت‌های انرژی غیرتبهگن باشند، در آن صورت ویژه توابع انرژی حقیقی می‌شوند.

اثبات: $|n\rangle$ غیرتبهگن و $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ و $H\Theta = \Theta H$

$$H\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle = \Theta E_n|n\rangle = E_n \Theta|n\rangle$$

ویژه مقادیر عملگر هرمیتی حقیقی اند. $(HE_n = E_n H)$

$$\left.\begin{aligned} H|n\rangle &= E_n|n\rangle \\ H\Theta|n\rangle &= E_n \Theta|n\rangle \end{aligned}\right\}$$

$|n\rangle$ و $\Theta|n\rangle$ هر دو ویژه کت هامیلتونی با ویژه مقدار یکسان $E_n$ هستند

بنا به فرض غیرتبهگن بودن، $|n\rangle$ و $\Theta|n\rangle$ باید حالات یکسان باشند یعنی یکی باشند یعنی متناسب باهم باشند.

$$\left.\begin{aligned} |n\rangle &\longrightarrow \langle x'|n\rangle \\ \Theta|n\rangle &\longrightarrow \underbrace{\langle x'|\Theta|n\rangle}_{} = \langle x'|n\rangle^* \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \langle x'|n\rangle = \langle x'|n\rangle^*$$

تابع موج برگشت زمان داده شده مزدوج مختلط می‌شود.

$\Downarrow$

ویژه توابع حقیقی می‌شوند.

مثال: نوسانگر هماهنگ ساده با $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$[H,\Theta]=0$ و غیرتبهگن بودن ویژه حالات وجود دارد $\Longleftarrow$ ویژه توابع موج نوسانگر هماهنگ حقیقی است.

مثال ) اتم هیدروژن
$$H = \frac{P^2}{2m} + V(r)$$

برای حالت پایه $n=1$ و $l=0, m=0$ غیر تبهگنی وجود دارد ⟵ تابع موج حقیقی است.

برای حالات برانگیخته به دلیل وجود تبهگنی ها ⟵ تابع موج ($Y_{lm}$ ها) مختلط می‌شوند

---

عملگر برگشت زمان در سیستم های اسپین $\frac{1}{2}$

می‌دانیم که ویژه کت عملگر $\vec{S}\cdot\hat{n}$ با ویژه مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|\hat{n},+\rangle = e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\beta}{\hbar}} |+\rangle$$

و $\beta$ زاویه قطبی
$\alpha$ زاویه سمتی

$$\Theta|\hat{n},+\rangle = e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{-i\frac{S_y\beta}{\hbar}} \Theta|+\rangle \quad (1)$$

توجه: در رابطه اخیر از $\Theta S_z\Theta^{-1} = -S_z$ و $\Theta S_y\Theta^{-1} = -S_y$ و $\Theta i = -i\Theta$ استفاده شده است.

$$\Theta|\hat{n},+\rangle = \eta\,|\hat{n},-\rangle \quad (2)$$

توجه: رابطه اخیر با استفاده از این واقعیت نوشته شده است که عملگر برگشت زمان $\Theta$ به نوعی همان عملگر برگشت حرکت است. با توجه به $\Theta J\Theta^{-1} = -J$ و $\Theta S\Theta^{-1} = -S$ ، می‌توان گفت که جهت ویژه کت عکس می‌شود.

$$①,② \Longrightarrow \; Θ|\hat{n},+\rangle = e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\beta}{\hbar}} Θ|+\rangle = \eta|\hat{n},-\rangle \quad ③$$

از طرف دیگر
$$|\hat{n},-\rangle = e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y(\beta+\pi)}{\hbar}} |+\rangle \quad ④$$

$$③,④ \Longrightarrow e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\beta}{\hbar}} Θ|+\rangle = \eta\, e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y(\beta+\pi)}{\hbar}} |+\rangle$$

$$e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\beta}{\hbar}} UK|+\rangle = \eta\, e^{\frac{-iS_z\alpha}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\beta}{\hbar}} e^{\frac{-iS_y\pi}{\hbar}} K|+\rangle$$

توجه: در رابطه اخیر از $Θ = UK$ و $K|+\rangle = |+\rangle$ استفاده شده است.

$$\boxed{Θ = UK = \eta\, e^{\frac{-iS_y\pi}{\hbar}} K}$$

در جلسه آینده با توجه به رابطه اخیر، اثر عملگر برگشت زمان را بر روی سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ بررسی خواهیم کرد.