دیفرانسیل تابع

تعریف دیفرانسیل تابع

تابعی همچون $y = f(x)$ را به صورتی در نظر بگیرید که در بازه $[a, b]$ پیوسته است. فرض کنید در نقطه‌ای همچون $x_0 \in [a, b]$، جابجایی اندک Δx نشان دهنده فاصله بین دو نقطه x_0 و نقطه همسایه‌اش یعنی $x_0 + \Delta x$ باشد. در این صورت تغییرات اندک Δy را می‌توان به صورت زیر و بر حسب Δx بیان کرد:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

به ازای هر تابع مشتق‌پذیر، افزایش جزئی Δy را می‌توان به صورت مجموع دو عبارت زیر بیان کرد:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

رابطه ۱

بدیهی است که ترم اول به صورت خطی به Δx وابسته بوده و جمله ترم دوم نیز از مرتب Δx است. ترم اول یا همان $A\Delta x$ تحت عنوان **دیفرانسیل تابع** شناخته شده و به صورت یکی از حالات زیر نشان داده می‌شود.

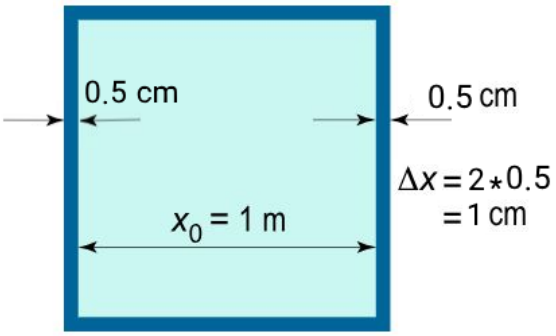
$$dy \ , \ df(x_0)$$

به منظور درک مفهوم دیفرانسیل تابع، مربعی به ضلع ۱ متر را در نظر بگیرید. بدیهی است که مساحت این مربع برابر است با:

$$S_0 = x_0^2 = 1\,\mathrm{m}^2$$

بنابراین S تابعی محسوب می‌شود که وابسته به طول یا همان x_0 است. حال فرض کنید ابعاد مربع فوق به اندازه $\Delta x = 1\,\mathrm{cm}$ تغییر کند. در این صورت مساحت جدید آن برابر است با:

$$S = x^2 = (x_0 + \Delta x)^2 = 1,01^2 = 1,0201\,\mathrm{m}^2$$



در حقیقت افزایش مساحتِ ΔS برابر است با:

$$\Delta S = S - S_0 = 1,0201 - 1 = 0,0201\,\mathrm{m}^2 = 201\,\mathrm{cm}^2$$

بنابراین دیفرانسیل ΔS را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}\Delta S = S - S_0 = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 &= \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x_0^2} \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \\ &= A\Delta x + o(\Delta x) \\ &= dy + o(\Delta x)\end{aligned}$$

با توجه به رابطه فوق اندازه دیفرانسیل dy برابر است با:

$$dy = A\Delta x = 2x_0\Delta x = 2 \cdot 1 \cdot 0,01 = 0,02\,\mathrm{m}^2 = 200\,\mathrm{cm}^2$$

هم‌چنین باقیمانده از مرتبه Δx^2 بوده و به صورت زیر بدست می‌آید.

$$o(\Delta x) = (\Delta x)^2 = 0,01^2 = 0,0001\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{cm}^2$$

توجه داشته باشید که در این مثال اندازه A برابر با مشتق S در نقطه x_0 است. این مشتق برابر است با:

$$A = 2x_0$$

بنابراین برای هر تابع مشتق‌پذیر گزاره زیر را می‌توان بیان کرد:

ضریب A در رابطه مربوط به تغییرات یک تابع در نقطه x_0 برابر با مشتق تابع f در نقطه مذکور است. نهایتا تغییرات اندک تابع f در نقطه x_0 برابر است با:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)$$

با تقسیم کردن طرفین رابطه فوق به مقدار غیر صفر $\Delta x \neq 0$، به عبارت زیر می‌رسیم.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

در حالتی حدی که $\Delta x \to 0$ برقرار باشد، مشتق در نقطه x_0 به صورت زیر بدست می‌آید.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0)$$

توجه داشته باشید که در محاسبه حد فوق، عبارت‌هایی در صورت که از مرتبه $\Delta x^2, \Delta x^3, \ldots$ هستند، برابر با صفر در نظر گرفته شده‌اند. اگر این ترم‌ها را با نماد $O(\Delta x)$ نشان دهیم، در حقیقت فرض زیر در نظر گرفته شده است.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

زمانی که تغییرات Δx به صفر نزدیک می‌شود، آن را با dx بیان می‌کنند. بنابراین در این حالت گزاره زیر را می‌توان بیان کرد:

$$dx = \Delta x$$

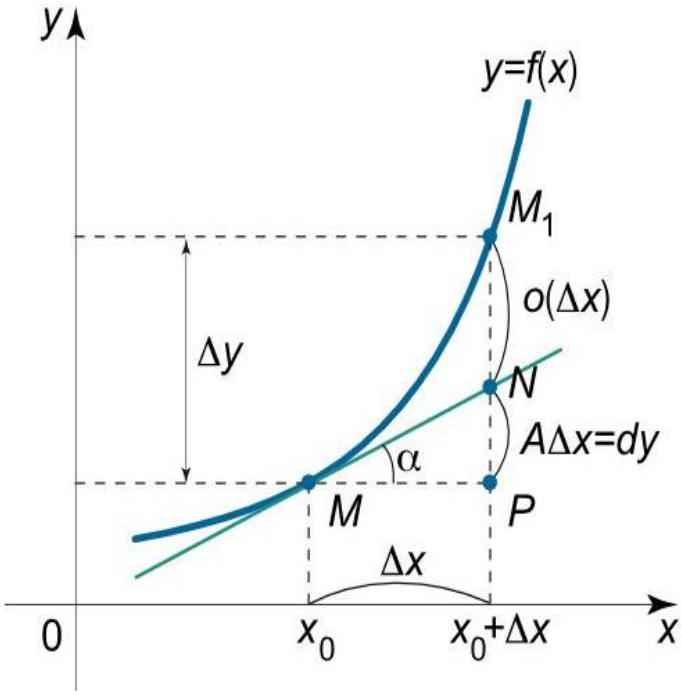
نهایتا مشتق تابع y نیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$dy = A\Delta x = y'dx$$

بنابراین همان‌طور که رابطه فوق نیز بر می‌آید، مشتق یک تابع برابر با نسبت دو دیفرانسیل است.

مفهوم هندسی دیفرانسیل تابع

شکل زیر تغییراتِ Δy را به صورت مجموعِ $A\Delta x$ و ترم‌های کوچک‌تر Δx نشان می‌دهد.



مماسِ MN که بر منحنی $y = f(x)$، در نقطه M ترسیم شده، دارای شیبی با زاویه α است. تانژانت این زاویه برابر است با:

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

زمانی که متغیر مستقل به اندازه Δx تغییر کند، y به میزان $A\Delta x$ تغییر می‌کند. باقیمانده تغییرات که با خط NM_1 نشان داده شده است، مربوط به ترم‌های $\Delta x^2, \Delta x^3, \ldots$ هستند.

ویژگی‌های دیفرانسیل تابع

فرض کنید دو تابع u و v وابسته به x باشند. در این صورت دیفرانسیل تابع دارای ویژگی‌های زیر است.

۱. یک ثابت را می‌توان از دیفرانسیل خارج کرد. بنابراین رابطه $d(Cu) = Cdu$ را می‌توان برای تابع u بیان کرد.

۲. دیفرانسیل مجموع دو تابع برابر با مجموع دیفرانسیل دو تابع است. منظور از این گزاره برقرار بودن رابطه $d(u \pm v) = du \pm dv$ است.

۳. دیفرانسیل یک ثابت برابر با صفر است ($d(C) = 0$).

۴. دیفرانسیل حاصل‌ضرب دو تابع به صورت زیر است.

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$$

۵. دیفرانسیل یک تابع کسری همچون $\frac{u}{v}$ برابر است با:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}.$$

۶. دیفرانسیل یک تابع برابر با حاصل ضرب مشتق تابع در دیفرانسیل متغیر مستقل است. بنابراین می‌توان گفت:

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx$$

دیفرانسیل گیری زنجیره‌ای

دو تابع ترکیب شده در یکدیگر همچون $y = f(u)$ و $u = g(x)$ را در نظر بگیرید. در چنین شرایطی مشتق y نسبت به x را می‌توان به صورت زیر و با استفاده از **مشتق‌گیری زنجیره‌ای** بر حسب x بدست آورد.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

توجه داشته باشید که در روابط فوق مشتق‌گیری نسبت به اندیس‌ها انجام شده است. از طرفی دیفرانسیل تابع y را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$dy = y'_u\, du$$

دیفرانسیل u نیز برابر است با:

$$du = u'_x\, dx$$

با استفاده از دو رابطه فوق، دیفرانسیل y نسبت به x به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$dy = y'_u\, du$$

دیفرانسیل u نیز برابر است با:

$$du = u'_x\, dx$$

با استفاده از دو رابطه فوق، دیفرانسیل y نسبت به x به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$dy = y'_u\, du = y'_u u'_x\, dx$$

مثال ۱

دیفرانسیل تابع $y = \sin x - x\cos x$ را بیابید.

در ابتدا باید مشتق این تابع معلوم شود. بنابراین مشتق y برابر است با:

$$\begin{aligned} y' = (\sin x - x\cos x)' &= \cos x - (x'\cos x + x(\cos x)') \\ &= \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) \\ &= \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x\sin x = x\sin x \end{aligned}$$

از این رو دیفرانسیل تابع y نیز برابر است با:

$$dy = y'dx = x\sin x\, dx$$

مثال ۲

میزان افزایش و دیفرانسیل تابع $y = x^2 - x + 1$ را در نقطه $x = 2$ به ازای افزایش دیفرانسیلی $dx = 1$ بدست آورید.

همان‌طور که در بالا بیان شد، افزایش تابع y برابر است با:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

در این مسئله نقطه همسایگی x_0 در $x+\Delta x = 2+1 = 3$ قرار دارد. بنابراین مقدار تغییرات تابع y برابر است با:

$$\Delta y = f(3) - f(2) = (3^2 - 3 + 1) - (2^2 - 2 + 1) = 7 - 3 = 4$$

از طرفی به منظور محاسبه دیفرانسیلِ تغییرات تابع در این نقطه باید از مفهوم مشتق استفاده کرد. بنابراین اندازه دیفرانسیل dy در این نقطه برابر است با:

$$\begin{aligned} dy = f'(x)\,\Delta x = (x^2 - x + 1)'\Delta x &= (2x-1)\,\Delta x \\ &= (2\cdot 2 - 1)\cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

مثال ۳

دیفرانسیل تابع $y = x\sin\frac{\pi x}{2}$ را در نقطه $x = \frac{1}{2}$ در حالتی بیابید که دیفرانسیل متغیر برابر با $dx = 0,01$ باشد.

دیفرانسیل تغییرات در حالت کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} dy = f'(y)\,dx = \left(x\sin\frac{\pi x}{2}\right)' dx &= \left(1\cdot\sin\frac{\pi x}{2} + x\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx \\ &= \left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx \end{aligned}$$

نهایتا با قرار دادن مختصات نقطه در عبارت فوق دیفرانسیل dy برابر با مقدار زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} dy = \left(\sin\frac{\pi\cdot\frac{1}{2}}{2} + \frac{\pi\cdot\frac{1}{2}}{2}\cos\frac{\pi\cdot\frac{1}{2}}{2}\right)\cdot 0,01 &= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0,01 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0,01 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{200}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,0126. \end{aligned}$$