وقت ۱۲۰ دقیقه- ماشین حساب آزاد

سوال۱- معادله زیر را از روش تفکیک‌پذیری(separation of variables) حل کنید؟ **۶ نمره**

$$**\, u_{tt}+\frac{2}{9}u_t=u_{xx}\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0,\quad u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\cos(4x) \end{cases}$$

حل: برای حل معادله همگن دو استار از روش تفکیک پذیر بصورت زیر عمل می‌شود:

$$v(x,t)=X(x)T(t),\qquad X\ddot{T}+\frac{2}{9}X\dot{T}=X''T,\ \div XT\ \Rightarrow\ \frac{\ddot{T}+\frac{2}{9}\dot{T}}{T}=\frac{X''}{X}=\lambda=-\mu^2 \qquad \boxed{۱۰٪}$$

$$\frac{\ddot{T}+\frac{2}{9}\dot{T}}{T}=\frac{X''}{X}=-\mu^2\ \Rightarrow\ \begin{cases} X''+\mu_n^2X=0 \\ \ddot{T}+\frac{2}{9}\dot{T}+\mu_n^2T=0 \end{cases} \qquad \boxed{۱۰٪}$$

$$v_x(0,t)=X'(0)T(t)=0\ \Rightarrow\ T(t)\neq 0\ \text{ then }\ X'(0)=0$$

$$v\left(\frac{\pi}{2},t\right)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t)=0\ \Rightarrow\ T(t)\neq 0\ \text{ then }\ X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$X(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x\Rightarrow X'(0)=0\Rightarrow X'(0)=A\mu\sin 0+B\mu\cos 0=B\mu=0$$

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow X\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\mu\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow A\neq 0,\ \cos\mu\frac{\pi}{2}=0,\quad \mu=2n-1,\ n=1,2,\ldots$$

$$X_n(x)=\cos((2n-1)x),\ n=1,2,\ldots \qquad \boxed{۱۰٪}$$

$$\ddot{T}+\frac{2}{9}\dot{T}+\mu_n^2T=0,\quad \mu^2=4n^2\ \Rightarrow r^2+\frac{2}{9}r+\mu_n^2=0\Rightarrow\ r_{1,2}=\frac{1}{18}\left(-2\pm\sqrt{2^2-324\mu_n^2}\right)$$

$$r_{1,2}=-\frac{2}{18}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{18}\right)^2-\mu_n^2}=-\frac{1}{9}\pm i\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2} \qquad \boxed{۱۵٪} \qquad \div$$

$$T_n(t)=e^{-t/9}\left(A_n\cos\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t+B_n\sin\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right) \qquad \boxed{۱۵٪}$$

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=e^{-t/9}\left(A_n\cos\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t+B_n\sin\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right)\cos(\mu_nx)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-t/9}\left(A_n\cos\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t+B_n\sin\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right)\cos(\mu_nx), \qquad \boxed{۱۰٪}$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\mu_n x)=0\ \Rightarrow A_n=0$$

۱۰٪

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-t/9}\left(B_n\sin\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right)\cos(\mu_n x)$$

$$u_t(x,t)=\cos(4x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-t/9}\left(-\frac{1}{9}\sin\left\{\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right\}+\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\cos\left\{\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\,t\right\}\right)\cos((2n-1)x)$$

۱۰٪

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos(4x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{9}B_n\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}\cos((2n-1)x)$$

$$B_n=-\frac{9}{\sqrt{\mu_n^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2}}\frac{\int_0^{\pi/2}r(x)\cos(4x)\cos((2n-1)x)\,dx}{\int_0^{\pi/2}r(x)\cos^2((2n-1)x)\,dx}$$

۱۰٪

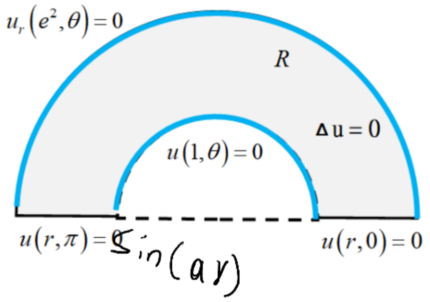
باسمه تعالی　　نام دانشجو　　امتحان بخش دوم ریاضیات عالی مهندسی　　نیمسال اول- دی ماه ۱۴۰۲

سوال ۲- معادله لاپلاس قطبی زیر را حل کنید؟ **۶ نمره**

$$*\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 1 < r < e^2, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r,0) = 0, \;\; u(r,\pi) = \sin(\pi r), \;\; u(1,\theta) = 0, \;\; \frac{\partial}{\partial r}u\left(e^2,\theta\right) = 0,$$

$$a = \pi$$



$$u(r,\theta) = W(r)\Theta(\theta), \qquad r^2\frac{(W'' + W'/r)}{W} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda^2 \; **$$ ۱۰٪

$$\begin{cases} r^2W'' + rW' + \lambda^2 W = 0, \;\; W(1) = 0, \;\; W'\left(e^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{4}, \;\; n = 0,1,2,\ldots \quad W(r) = \sin(\lambda_n \ln r) \\ \Theta''(\theta) - \lambda^2\Theta(\theta) = 0, \;\; \Theta(0) = 0, \quad \Theta_n(\theta) = B_n \sinh(\lambda_n \theta) \end{cases}$$ ۱۰٪ ۱۰٪

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W(r)\Theta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n \ln r),$$ ۱۰٪

$$f(r) = u(r,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh(\lambda_n\pi)\sin(\lambda_n \ln r) = \sin(ar),$$ ۱۰٪

$$B_n \sinh(\lambda_n\pi) = \frac{\int_1^{e^2} \frac{1}{r} f(r)\sin(\lambda_n \ln r)\,dr}{\int_1^{e^2} \frac{1}{r}\sin^2(\lambda_n \ln r)\,dr}$$ ۱۰٪

$$now: \int_1^{e^2} \frac{1}{r}\sin(\lambda_m \ln r)\sin(\lambda_n \ln r)\,dr \xrightarrow[r=1 \Rightarrow x=0, \;\; r=e^2 \Rightarrow x=2]{x=\ln r, \;\; dx=\frac{1}{r}dr} \int_0^2 \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \delta_{mn}$$ ۱۵٪

$$B_n \sinh(\lambda_n\pi) = \frac{\int_1^{e^2} \frac{1}{r} f(r)\sin(\lambda_n \ln r)\,dr}{1} \;\Rightarrow B_n = \frac{\int_1^{e^2} \frac{1}{r} f(r)\sin(\lambda_n \ln r)\,dr}{\sinh(\lambda_n\pi)}$$ ۱۰٪

$$B_n = \frac{1}{\sinh(\lambda_n\pi)}\int_1^{e^2} \frac{1}{r}\sin(\pi r)\sin(\lambda_n \ln r)\,dr$$ ۱۵٪

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n \ln r),$$

سوال۳: مقدار زیر را محاسبه کنید؟ **۲ نمره**

$$(2-i)^{i-2} =$$

پاسخ:

$$(2-i)^{i-2} = \underbrace{e^{(i-2)\ln(2-i)}}_{\boxed{۱۰٪}} = \exp\left((i-2)\ln(2-i)\right) = \exp\left((i-2)\left(\ln\sqrt{5} - 0.464i \pm 2n\pi i\right)\right) \quad \boxed{۳۰٪}$$

$$= \exp\left(i\ln\sqrt{5} + 0.464 \mp 2n\pi - 2\ln\sqrt{5} + 0.927i \mp 4n\pi\right) \quad \boxed{۲۰٪}$$

$$= \exp\left(0.805i + 0.464 - 1.60944 + 0.927i \mp 6n\pi\right)$$

$$= \exp\left(1.7317i - 1.145 \mp 6n\pi\right)$$

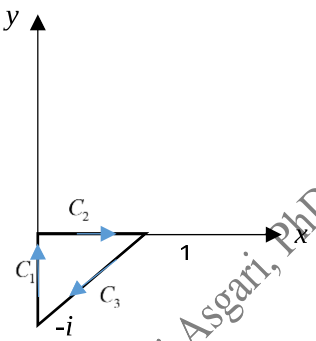
$$= e^{(-1.145 \mp 6n\pi)}\left(\cos(1.7317) + i\sin(1.7317)\right) \quad \boxed{۲۰٪}$$

if $n = 0$ so we have: $e^{(-1.145)}\left(\cos(1.7317) + i\sin(1.7317)\right) = -0.051 + 0.314\,i$ $\boxed{۲۰٪}$

سوال ۴- انتگرال روی خط مختلط تابع $f(z) = z^2$ را بر روی مسیر بسته مثلثی با رئوس 0 ، 1 و $-i$ بصورت ساعتگرد از روش سه گام محاسبه کنید در مورد جواب توضیح دهید؟ **۳ نمره**

حل:

جواب صفر است چون تابع $f(z) = z^2$ در هر مسیر بسته تحلیلی است بنابراین طبق قضیه کوشی جواب این سوال برابر صفر است.



$$I = \oint_C z^2 dz = 0$$

$$C_1: \quad z(t) = ti, \qquad \dot{z}(t) = i \qquad -1 \le t \le 0$$

$$C_2: \quad z(t) = t \qquad \dot{z}(t) = 1 \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \boxed{۳۰٪}$$

$$C_3: \quad z(t) = t + (t-1)i, \qquad \dot{z}(t) = 1 + i \qquad 0 \le t \le 1$$

$$I = -\oint_C z^2 dz = -\int_C (x+iy)^2 dz = -\int_C \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)dz = -\int_{C_1}\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)dz$$

$$-\int_{C_2}\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)dz - \int_{C_3}\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)dz = \quad \boxed{۲۰٪}$$

$$= \int_{-1}^{0} t^2 i\,dt - \int_0^1 \left(t^2\right)dt - \int_0^1 t^2 - (t-1)^2 + 2t(t-1)\times(1+i)\,dt = \underbrace{\frac{1}{3}i - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}}_{\boxed{۳۰٪}} = 0 \quad \boxed{۲۰٪}$$

سوال۵- مقدار انتگرال های زیر را برای هر کنتور پادساعتگرد شامل تمام نقاط تکینه تعیین کنید؟ **۳ نمره**

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}$$

$$1:\ \oint_C\left(\frac{z^4-5z^2+6}{(2z-i)^3}-ze^{\pi/z^2}\right)dz=?$$

$$\oint_C\frac{z^4-5z^2+6}{(2z-i)^3}dz=\oint_C\frac{\frac{1}{8}\left(z^4-5z^2+6\right)}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^3}dz=\frac{\pi i}{8}\left(z^4-5z^2+6\right)''\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{\pi i}{8}\left(12z^2-10\right)\Big|_{z=\frac{i}{2}}=-\frac{13\pi i}{8}$$

۲۰٪

$$ze^{\pi/z^2}=z\left(1+\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^2}{2!z^4}+\frac{\pi^3}{3!z^6}+\ldots\right)=z+\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^2}{2!z^3}+\ldots\quad b_1=\pi$$

۲۰٪

$$I_1=\oint_C\left(\frac{z^4-5z^2+6}{(2z-i)^3}-ze^{\pi/z^2}\right)dz=2\pi i\sum\operatorname{Res}\left[f(z)\right]=\frac{13\pi}{8}i+2\pi^2 i$$

۲۰٪

$$2:\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{5}-2\cos\theta}=2\pi$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\qquad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

۲۰٪

$$I=\oint_C\frac{1}{\sqrt{5}-\frac{2}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{1}{\sqrt{5}z-\left(z^2+1\right)}\frac{dz}{i}=i\oint_C\frac{dz}{z^2-\sqrt{5}z+1}=i\oint_C\frac{dz}{\left(z-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)i\right)\left(z-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i\right)}$$

تابع انتگرالده قطبی ساده در دو نقطه $z_1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i$ و $z_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}i$ تکین است. اما $z_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}i$ ت در بیرون C

قرار دارد بنابراین ما فقط به مانده انتگرالده قطبی در $z_1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i$ نیاز داریم. این مانده را به فرم زیر تعیین می کنیم.

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=z_2}\frac{i}{\left(z-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)i\right)\left(z-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i\right)}\right)=-2\pi\left[\frac{1}{\left(z-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)i\right)}\right]_{z=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i}=2\pi$$

۲۰٪

با آرزوی موفقیت برای شما عزیزان

علی عسگری، عضو هیات علمی گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری, دانشگاه مازندران