تبدیلات لورنتس

توجه داشته باشید که در حد سرعتهای کم ، نسبیت نیوتنی که بر پایه تبدیلات گالیله استوار است ، می‌تواند به خوبی جوابگوی آزمایشات موجود باشد. اما در حد سرعتهای بالا ، لازم است که تبدیلات گالیله جای خود را به تبدیلات جدیدی بدهد به طوری که نسبیت نیوتنی به نسبیت خاص انیشتین تبدیل شود.

در حد سرعتهای بالا ، در درس نسبیت خاص در ترم آینده ، ثابت می‌کنیم که تبدیلات گالیله به تبدیلات لورنتس تغییر خواهد کرد.

در حقیقت ، نسبیت خاص انیشتین که در سرعتهای زیاد کاربرد دارد براساس تبدیلات لورنتس استوار است.

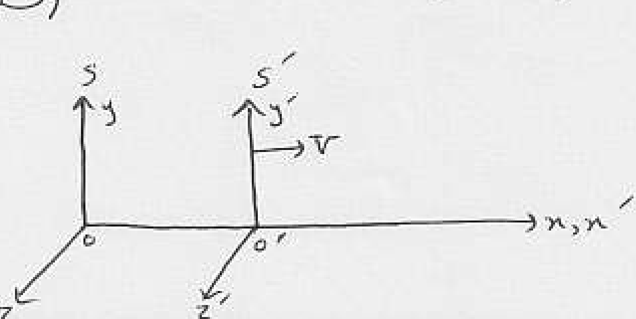
تبدیلات گالیله (سرعتهای کم)

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \longrightarrow$$

تبدیلات لورنتس (سرعتهای زیاد)

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

(نسبیت نیوتنی) $\longrightarrow$ نسبیت خاص انیشتین



با استفاده از تبدیلات لورنتس می‌توانیم انقباض طول را به دست آوریم

میله‌ای به طول L_0 در چارچوب مرجع S' نسبت به O' در حال سکون است. میله در امتداد محور x' بین نقاط x'_1 و x'_2 ساکن است.

از آنجا که میله نسبت به O' ساکن است، ناظر O' ویژه طول $L_0 = x'_2 - x'_1$ را اندازه‌گیری می‌کند.

اما چارچوب S' نسبت به S در امتداد محور مشترک x و x' با سرعت v در حال حرکت است. پس میله نسبت به ناظر O در چارچوب S با سرعت v در حال حرکت است.

ناظر O برای اندازه‌گیری طول میله باید x_1 و x_2 یعنی مکان دو سر میله را اندازه‌گیری کند و $x_2 - x_1$ را به عنوان طول میله بپذیرد.

با استفاده از تبدیلات لورنتس داریم:

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

اگر بخواهیم $x_2 - x_1$ برابر با طول میله در S باشد، لازم است که اندازه‌گیری مکان دو سر میله به طور همزمان انجام گیرد. یعنی باید $t_2 = t_1$ باشد. در نتیجه:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ فرمول انقباض طول

فرمول فوق قبلاً به طریق دیگری اثبات شده بود.

تبدیل سرعتها (با استفاده از تبدیلات لورنتس)

می‌دانیم:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{و} \quad u_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow u_x' = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{dt}}{\frac{dt}{dt} - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} =$$

$$\boxed{u_x' = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}}$$

در مشتق رابطه اخیر، توجه داشته باشید که $V =$ ثابت ، درنتیجه $\frac{dV}{dt} = 0$ در نظر گرفته شده است.

می‌دانیم $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$

$$u'_y = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{dt}{dt} - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}}$$

به طور مشابه می‌توان به دست آورد:

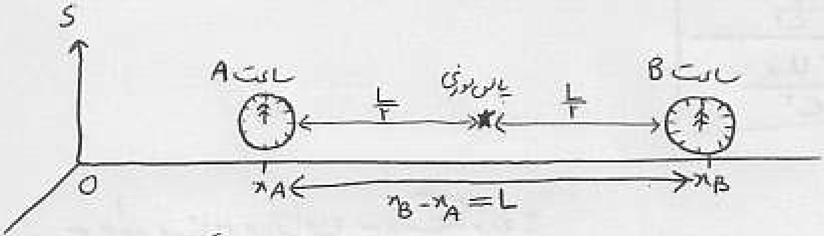
$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad , \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}}$$

همزمانی و همزمان سازی ساعت ها

با توجه به آنکه سرعت نور محدود و برابر با $C=3\times10^8\frac{m}{s}$ است، در هنگام همزمان سازی ساعتها باید به زمان لازم برای انتقال سیگنال های نوری توجه کرد.

می خواهیم دو ساعت A و B را که در دو مکان به فاصله L از یکدیگر در چارچوب S در حال سکون هستند را همزمان کنیم



یک پالس نوری را در وسط در مکان وسط بین ۲ ساعت منتشر می کنیم.

از آنجا که فاصله هر دو ساعت نسبت به چشمه پالس نوری یکسان و برابر با $\frac{L}{2}$ است، هر دو ساعت به طور همزمان نور را دریافت می کنند و هر دو ساعت خود را بر روی ۱۲ تنظیم می کنند. بدین ترتیب دو ساعت A، B در S همزمان شده اند.

سؤال: اگر چارچوب S' نسبت به S با سرعت ثابت V در حرکت باشد، آیا از دید ناظر O'، دو ساعت A و B همزمان هستند؟

فرض کنید پالس نوری در لحظه $t=0$ در چارچوب S متولد شده باشد، و در لحظه t_A به ساعت A و در لحظه t_B به ساعت B رسیده باشد.

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{V x_A}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad t_A = \frac{\frac{L}{2}}{c}$$

زمان رسیدن نور به ساعت A از دید O'

زمان رسیدن نور به ساعت A از دید O

$$t'_B = \frac{t_B - \frac{V x_B}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad t_B = \frac{\frac{L}{2}}{c}$$

زمان رسیدن نور به ساعت B از دید O'

زمان رسیدن نور به ساعت B از دید O

$$\Longrightarrow t'_A = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{V x_A}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad t'_B = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{V x_B}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = \frac{\left(\frac{L}{2c} - \frac{L}{2c}\right) - \frac{V}{c^2}\left(x_A - x_B\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{LV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

از دید O' در چارچوب S'، دو ساعت A و B همزمان نیستند.

این درحالی است که در چارچوب S دو ساعت A و B همزمان شده اند.

نتیجه: دو رویداد که از دید یک چارچوب مرجع لخت همزمان دیده می‌شوند، از دید چارچوب لخت دیگری که نسبت به اولی در حال حرکت است همزمان نمی‌باشد. مگر آنکه دو رویداد در یک نقطه از فضا رخ دهند. در این صورت چون L = 0 می‌شود، می‌توان گفت دو ساعت A و B از دید O' نیز همزمان می‌شوند.